LLPHI 624 : Qu'est-ce que la logique ?

Brice Halimi

Second semestre 2009

Hypothèse de travail : la logique comme discipline médiatrice entre la philosophie et les mathématiques. « Science des lois du raisonnement ». L'enjeu sous-jacent à cette définition est l'unité des règles usuelles du raisonnement ordinaire, d'une part, et des procédures de démonstration mathématique d'autre part.

L'autre élément fondamental est la profonde historicité de la logique et son devenir-mathématique au XXe siècle. La logique comme discipline mathématique. Quel est son objet dans ce cas ? R : les théories mathématiques elles-mêmes (en tant que formalisées). Mais la logique n'est pas passée corps et biens aux mathématiques. De plus, l'utilisation d'outils et de méthodes mathématiques ne signifie pas que l'objet de la logique est lui-même mathématique. Logique comme calcul et logique comme langage (van Heijenoort) : cet enjeu est d'une certaine manière interne à la logique formelle (mathématisée).

1 Aristote

Premiers Analytiques : théorie du syllogisme, *Seconds analytiques* : théorie de la science démonstrative, et en cela « logique », et également (avec le livre M de la *Métaphysique*) « philosophie des mathématiques ».

Double objectif poursuivi par Aristote dans cette œuvre : il s'agit d'une part de déterminer la spécificité (notamment) des mathématiques comme science *démonstrative*, et en même temps d'inscrire les mathématiques dans le domaine des sciences en général (*epistèmè*).

La méthode du syllogisme comme matrice fondamentale de tout discours scientifique. Ceci dit, les exemples mathématiques transmis par Aristote ne sont pas toujours syllogistiques (exemple de l'incommensurabilité de la diagonale, établie en raisonnant par l'absurde). On peut dire que le syllogisme permet d'une part d'ériger la biologie au statut de science, en ressaisissant les genres naturels sous un appareil démonstratif, et d'autre part (contre Platon) de référer les démonstrations mathématiques à des genres « déterminés » (si l'on peut dire, car les différents genres ne sont pas des espèces d'un genre suprême) par un certain nombre d'attributs propres (par exemple, le pair et l'impair s'appliquent exclusivement aux nombres).

Rapport aux mathématiques

Les mathématiques produisent bien un savoir, qu'une théorie de l'abstraction permet de raccorder à l'univers physique (exemple : le nombre comme numérable, et le nombre comme nombrant) ; mais d'un autre côté les mathématiques s'articulent selon des procédés démonstratifs qui sont en partie étrangers les uns aux autres, ce qui requiert d'introduire des domaines d'objets séparés, que Aristote nomme « genres » (*genos*), et entre lesquels aucune procédure de transposition ou de généralisation n'est envisageable.

Cf. Euclide (3è siècle) : il y a d'un côté les grandeurs, et de l'autre les nombres ; ces deux domaines se distinguent notamment par le type d'unité qui leur est propre : une unité de grandeur est divisible, une unité numérique est indivisible. Ainsi Euclide, dans ses *Eléments*, expose-t-il une théorie des rapports ou fractions entre nombres et une théorie des proportions entre grandeurs, sans qu'aucune théorie générale des rapports ne puissent coiffer ces deux théories en une seule (les rapports ne sont pas des objets, mais à chaque fois adhérents à un certain domaine d'objets). Il serait anachronique de vouloir gommer cette dichotomie entre l'ordre du discret et l'ordre du continu, dichotomie qui pour un Grec de l'époque d'Aristote et même d'Euclide, organise originairement le champ du savoir mathématique. On peut à la limite concevoir une multiplication externe des grandeurs par des nombres, mais pas des multiplications entre grandeurs (donc pas d'isomorphisme concevable). On pourrait reprendre la théorie des proportions chez Euclide, et essayer de montrer qu'elle est apte à subsumer le cas des rapports entre nombres, mais ce serait contraire à l'esprit d'Euclide. En X.5 des *Eléments*, Euclide démontre que deux grandeurs commensurables (c'est-à-dire admettant une commune mesure qui mesure chacune d'elles un certain nombre de fois) « ont comme rapport l'une relativement à l'autre celui d'un nombre relativement à un nombre ». On parle de « double traitement par simple juxtaposition » : la proposition d'Euclide relie en effet des « objets » *a priori* hétérogènes, à savoir un rapport entre granduers et un rapport entre nombres – alors que la proportionnalité entre grandeurs et la proportionnalité entre nombres ont été définies sur la base de définitions tout à fait différentes.

Seconds Analytiques (SA) : les principes d'une science démonstrative relèvent d'abord de deux points de vue : celui de la signification de certains termes, et celui de l'existence de certains objets. Cette première dualité est traversée par une seconde : l'opposition entre termes et objets premiers d'une part, termes et objets dérivés d'autre part. Cette dernière opposition est fixe, contrairement à une approche axiomatique (formelle). On obtient donc quatre postes théoriques : la signification des termes premiers (par exemple « unité », « ligne droite »), qui doit être posée, de même que la signification des termes dérivés (par exemple « triangle ») ; l'existence des objets premiers (« point », « ligne ») doit être posée ; enfin, l'existence des autres objets ou propriétés doit être démontrée. Tous les énoncés qui posent des significations ou des existences sont des thèses : des définitions dans le cas des significations, des hypothèses dans le cas des existences. En particulier, une définition ne prouve rien, et en particulier elle ne prouve pas l'existence de la chose définie. Les hypothèses d'existence, au sens absolu, ne sont pas susceptibles de démonstration. Mais les hypothèses peuvent également être abordées d'un point de vue didactique : les hypothèses sont alors les assertions que le maître pose sans démonstration, face à un élève, et auxquelles l'élève peut ou non donner son assentiment : dans le cas où l'élève ne donne pas son assentiment, l'hypothèse est imposée : elle est idéalement en attente de démonstration, et se nomme « postulat ». A tout ceci s'ajoutent les principes communs, ou « axiomes », qui sont transdomaniaux, mais qui n'ont de sens qu'appliqués à un domaine déterminé. Axiomes ou « notions communes », définitions, postulats : on retrouve exactement les diverses sortes d'énoncés présents dans les *Eléments* d'Euclide.

76b 23 - 77a 4 : une nouvelle classification est proposée. Il y a tout d'abord « ce qui n'est ni une hypothèse, ni un postulat », c'est-à-dire « ce qui est nécessaire par soi et qu'on doit nécessairement croire, parce que la démonstration, pas plus que le syllogisme, ne s'adresse au discours extérieur, mais au discours intérieur de l'âme ». Registre étrange. Il y a ensuite « ce qui, démontrable , est néanmoins posé par le maître sans démonstration », avec ou sans l'assentiment de l'élève. Nouvelle définition de l'hypothèse, incompatible avec la précédente, et introduisant la notion de « postulat » (cas où l'élève ne donne pas son assentiment). Puis Aristote distingue les termes (*horoi*) des hypothèses : ils « ne disent rien de l'existence ou de la non-existence [...] les termes requièrent seulement d'être compris » (76b 35-37). On a l'impression qu'Aristote réinterprète les définitions en adoptant le point de vue de l'élève, c.-à-d. celui de la compréhension et non plus de l'établissement de la signification, ce qui explique qu'il démarque désormais les définitions des hypothèses. Enfin, Aristote semble redéfinir la notion d'hypothèse au sens très général d'une prémisse en attente de démonstration.

Ainsi les notions d'axiome, de définition, de postulat, d'hypothèse, reçoivent des présentations très différentes. Ceci correspond en fait à deux orientations très différentes de l'œuvre d'Aristote : d'un côté, les SA vise un système axiomatique, repris en grande partie par Euclide ; d'un autre côté, ils se placent dans une perspective didactique (beaucoup plus héritière du *Ménon* de Platon). La déduction des Anciens ne fut pas d'abord un corpus organisé de connaissances, mais plutôt la formalisation des procédures du discours qu'un maître idéal (sachant tout) doit employer pour transmettre rationnellement (c'est-à-dire sans le recours à l'argument d'autorité ni à l'expérience) tout son savoir à un élève idéal (ignorant tout). Les SA présentent à cet égard une étape intermédiaire dans la réintégration purement théorique des procédures dialogiques anciennes, et ainsi admettent un double versant : celui, incarné par Euclide, de la science comme système de connaissances, et celui de la science comme didactique idéale. Objectivement, les principes sont : définitions de termes, hypothèses d'existence, axiomes. Interlocutivement, les principes correspondent à trois types de dispositions prérequises de l'élève : pouvoir comprendre le sens des mots employés par le maître ; pouvoir juger de la vérité de ce qu'il reconnaît en lui comme le sachant nécessairement déjà ; pouvoir juger de la vérité de ce qui peut être vrai ou faux (assentir ou non).

Caractérisation de la science

La nature de la science

Par sciences, Aristote entend toutes les activités réfléchies de l'être humain productrices d'un savoir vrai, et distingue ainsi les sciences « théoriques » (objet privilégié des SA), mais aussi les sciences « pratiques » (sciences de l'action) et les sciences « poétiques » que sont les techniques et par exemple la médecine. La science se caractérise essentiellement par le fait de savoir pourquoi quelque chose est vrai, et pourquoi il ne peut en être autrement.

SA, I, 2, 71b 16 :

> [. . .] ce que nous appelons ici *savoir* c'est connaître par le moyen de la démonstration. Par *démonstration* j'entends le syllogisme scientifique, et j'appelle *scientifique* un syllogisme dont la possession même constitue pour nous la science. – Si donc la connaissance scientifique consiste bien en ce que nous avons posé, il est nécessaire aussi que la science démonstrative parte de prémisses qui soient vraies, premières, immédiates, plus connues que la conclusion, antérieures à elle, et dont elles sont les causes. C'est à ces conditions, en effet, que les principes de ce qui est démontré seront aussi appropriés à la conclusion.

La scientificité du savoir scientifique consiste en la liaison nécessaire des propositions dont il se compose : les prémisses étant posées, la conclusion s'ensuit nécessairement. C'est à cette condition qu'on peut parler de démonstration. Mais la démonstration se distingue d'une simple déduction formelle par le fait que ses prémisses sont vraies, premières et immédiates, et causes de la conclusion.

Les prémisses doivent être vraies, car on ne saurait produire une vérité en partant de quelque chose de faux ou même d'hypothétique : l'ordre du vrai est clos, et une vérité concerne toujours une assertion, non un rapport entre assertions. 71b 26 : « il n'est pas possible de connaître scientifiquement ce qui n'est pas ».

Les prémisses doivent d'autre part être première et immédiates, c'est-à-dire ne pas être susceptibles de démonstration : toute prémisse intermédiaire, non immédiate, doit comme telle être démontrée, et ainsi reconduite à des prémisses véritablement primitives – l'idée étant 1°) qu'il existe un moyen de dégager des connaissances immédiates, et de les reconnaître comme immédiates ; 2°) que ce procédé idéal doit pouvoir être accompli en un nombre fini d'étapes, autrement dit qu'il ne saurait y avoir de régression à l'infini ; 3°) qu'on ne saurait admettre de démonstration circulaire (sinon toute proposition deviendrait démonstrable, en étant son propre fondement, cf. 72b 18). On reviendra avec Aristote sur ces deux points.

Les prémisses doivent ensuite être cause de la conclusion : elles doivent non seulement déterminer « formellement » la conclusion en vertu de règles d'inférence, mais aussi avoir pour contenu un état de choses qui explique effectivement (« concrètement ») l'état de choses énoncé dans la conclusion.

En tant que premières et causes, les prémisses doivent enfin être mieux connues que la conclusion : non pas parce qu'elles sont plus directement connues, mais par ce qu'en droit elles renvoient à ce qui, dans la nature de ce qui est connu, rend compte de ce que nous en connaissons dans la conclusion, ce que Aristote appelle le « moyen terme » :

> Car la cause par laquelle une chose est, non pas ceci ou cela, mais d'une façon absolue et substantiellement, aussi bien que la cause par laquelle une chose est, non plus d'une façon absolue mais ceci ou cela, en tant qu'elle possède quelque attribut essentiel ou accidentel, c'est, dans les deux cas, le moyen terme. (II, 2, 90a 10)

Remarquons qu'Aristote parle d'antériorité relative des prémisses par rapport à la conclusion : ce qui ménage une forme de modulation du point d'arrêt dans la recherche régressive des causes. Ceci rejoint un dernier point : Aristote indique que les principes doivent être « appropriés » à la conclusion : le caractère causal de la priorité des principes garantit en effet leur propriété dans le domaine où ils sont vérifiés. Les principes sont propres dans la mesure où ils sont susceptibles de fournir la connaissance des véritables enchaînements nécessaires, des enchaînements pertinents. En ce sens, seuls sont principes *stricto sensu* les principes déterminés, spécifiques, d'une science donnée.

Il convient en effet de distinguer chez Aristote, comme on l'a déjà dit, deux types de principes : d'une part les principes propres (par exemple la définition de la ligne), et d'autre part les principes communs (par exemple : *si, de deux choses égales, on ôte des choses égales, les restes sont égaux* (75a 42)). Seuls les principes propres peuvent jouer le rôle de points de départ explicatifs ; les principes communs ont au contraire davantage le statut d'instruments transthéoriques (cf. 76a 37). Aristote distingue un certain nombre de formes de prédication, qui sont communes aux différentes sphères de prédication, et qui se cristallisent en premier lieu sous la forme de différentes *catégories* (*katègoria*). Aristote distingue également, non plus des formes prédicatives, mais des principes démonstratifs transthéoriques. En II, 10, il oppose les principes propres (relatifs par exemple à la ligne) et principes communs, tels que : « si, de choses égales, on ôte des choses égales, les restes sont égaux ». L'essentiel est que les principes communs ne sont communs qu'analogiquement : ils ne font signe vers aucun domaine d'objets constitué de ce qui est commun à tous les domaines d'objets, mais se diffractent à chaque fois selon tel ou tel domaine d'objets. L'exemple donné par Aristote concerne un principe valable, mais seulement en parallèle, pour ainsi dire, à la fois en arithmétique (quantités discrètes) et en géométrie (quantités continues). La quantité est une catégorie, elle relève des formes de fonctionnement de la pensée théorique, non des êtres que cette pensée vise.

S'il revient à une discipline de dégager ces principes, c'est à la dialectique, non à la science (cf. Méta. K, 1061b 19). L'analogie est le mode selon lequel les catégories et les principes communs peuvent intervenir parmi les principes d'une science, passer des règles transthéoriques de la connaissance des choses, aux propriétés des choses elles-mêmes. Cette signification de l'analogie est ce qui permet de poser l'existence de genres d'objets, tout en rendant compte de la pratique scientifique : Aristote reconnaît lui-même que l'astronomie descriptive emploie des principes de l'astronomie mathématique, l'harmonie des principes de l'arithmétique, et la médecine parfois des principes de géométrie (SA, 79a 14). dans ces différents cas, il y a subordination d'une science à l'autre (78b 35) : la science subordonnée fournit des faits, la science dominante fournit alors des causes ; mais cette dernière joue seulement le rôle d'instrument de pensée, car les mathématiques n'ont pas comme tels pour objets les substrats concrets qu'étudie l'astronome ou le médecin.

Les éléments de la science

SA, I 10, 76b 11 : « C'est qu'en effet toute science démonstrative tourne autour de trois éléments : ce dont elle pose l'existence (c'est-à-dire le genre, dont elles considèrent les propriétés essentielles) ; les principes communs, appelés axiomes, vérités premières d'après lesquelles s'enchaîne la démonstration ; et, en troisième lieu, les propriétés, dont la science pose, pour chacune, la signification. »

1°) Les genres

Ce sont les sujets mêmes de chaque science, comme par exemple l'unité ou le nombre pour l'arithmétique, le point, la ligne ou la grandeur pour la géométrie. Ces notions, propres à chaque science, sont introduites par des thèses qui en posent l'existence en même temps que la signification (cf. par exemple Méta. 1016b 24). Problème de la définition de ces genres (cf. par exemple Topiques VI 142a 22 sq.) : certes, mais il y a le fait brut de la distribution des pratiques des sciences.

Genre : à la fois matière et essence (cf. Méta. Δ, 1024b 8). Le genre apparaît comme une entité qui n'est pas complètement déterminée : comme un domaine dans lequel une multiplicité d'objets peuvent se différencier tout en continuant d'être pensés comme une unité, parce que leurs différences s'inscrivent dans un intervalle bien délimité par un couple de contraires et qu'on pose une matière unique comme le support permanent de ces variations.

2°) Les axiomes

Ce sont les propositions ou notions générales qui s'avèrent indispensables à toute science. Ces principes ne sont pas ce sur quoi (*hai peri ho*), mais ce au moyen de quoi (*hai ex hôn*) s'effectue la science (SA, 88b 28). Ce ne sont pas des sujets de déduction (problèmes), mais des éléments de raisonnements (prémisses) (cf. *Topiques* I 101b 15). Une analogie structurelle pouvant exister entre nombres et grandeurs ne saurait constituer un objet de science. Il arrive à Aristote de parler d'une mathématique universelle, dont l'exemple serait sans doute aux yeux d'Aristote la théorie des proportions d'Eudoxe (connue par Euclide), mais d'autres passages ferment la porte à une telle suggestion : cf. Méta. M, 1077b 18. (L'argumentation d'Aristote consiste à montrer que la science mathématique a pour objets des êtres en tant que non séparables, et l'évocation d'une mathématique universelle vise dans l'esprit d'Aristote à renforcer cette argumentation, par l'exemple d'une abstraction supérieure qui manifestement ne garantit en rien à ses objets une existence séparée.)

3°) Les attributs essentiels

Ce sont les véritables points de départ respectifs des différentes connaissances scientifiques. Exemples : le pair et l'impair, le carré, le cube (propriétés essentielles du nombre) ; l'irrationalité d'une grandeur, la direction d'une droite (propriétés essentielles d'êtres géométriques). Toute démonstration se réduit finalement à l'attribution de propriétés essentielles, inhérentes à un genre déterminé, par le moyen de principes communs (SA 75a 39) – par opposition à toute possibilité de science transgénérique. Idée qu'une science constitue une unité régionale close pour les opérations de démonstration – la méthode du syllogisme étant ce qui permet de faire apparaître une telle sphère comme cohérente tout en l'explorant, d'établir la pertinence de certaines propriétés et leur statut de moyen terme, tout en l'exploitant (cela va dans les deux sens).

La forme syllogistique

Le syllogisme est un discours déductif dont la nature est formelle en ceci que la nécessité de la conclusion concerne seulement le lien qui la rattache aux prémisses. Mais ce qui caractérise plus encore le syllogisme, c'est qu'il établit un enchaînement entre deux termes par le moyen d'un troisième : « [...] si on se contente de poser une seule chose, jamais une autre chose n'en découle nécessairement (par *une seule chose*, je veux dire qu'on pose soit un seul terme, soit une seule thèse), mais que deux thèses constituent le point de départ premier et minimum rendant possible toute conclusion [...] » (SA, I 3, 73a 7). PA, 25b 37 : « Si en effet A est dit universellement de B et B universellement de Γ, il est nécessaire [*anagkè*] que A soit dit universellement de Γ. »

Lukasiewicz (p. 30-31) interprète le « Si » comme le signe d'une implication matérielle, et justifie l'occurrence de la notion de nécessité comme la traduction d'une quantification universelle portant sur les variables A, B. La nécessité recouvre seulement ici une généralité schématique, et le syllogisme une « implication formelle » (Russell). « Le signe aristotélicien de la nécessité syllogistique a donc le même statut qu'un quantificateur universel et par suite il peut être omis comme l'est un quantificateur universel qui se trouve en tête d'une formule vraie. » (p. 31)

Selon G.-G. Granger, au contraire, le syllogisme n'est pas une proposition implicative mais une inférence sémantique. Un énoncé est satisfait par une représentation, c'est-à-dire par une certaine assignation d'entités, s'il correspond à une situation distinguée dans l'univers de la représentation. On dit alors que cette représentation est un modèle de l'énoncé. Un énoncé sera alors dit logiquement valide si toute représentation le satisfait. Et de même un énoncé est-il conséquence logique d'un autre si tout modèle du second est également un modèle du premier. Le syllogisme est donc une (méta-)règle d'inférence, mais sous forme sémantique, et sa nécessité tient au fait qu'un syllogisme est à chaque fois la mise en forme de la causalité nécessaire d'un moyen terme. Seulement il convient de préciser que le lien syllogistique ne donne que la condition d'une propriété, par opposition à l'indication d'une essence donnant le sens des propriétés.

Syllogisme : logique et grammaire

Inscription fondamentale de la logique d'Aristote dans la langue naturelle, c'est-à-dire dans la perspective apophantique de l'exhibition-énonciation des découpages objectifs du monde naturel. (On le verra, la perspective propre à Frege entend prendre le contrepied d'une telle inspiration.) Syntaxe prédicative articulée selon les catégories, et organisée par la fonction apophantique, consistant à dire quelque chose d'un quelque chose visé comme substrat physique. Le sens des catégories est de classer l'ensemble des prédicats sous un nombre fini de déterminations physiques, en dessinant une continuité allant de la perception à la démonstration, selon le support de l'idée de cause. La logique est la ressaisie qui permet d'intégrer la perception dans la constitution d'une objectivité physique. Le mode d'association des prédicats physiques est en particulier réglé par deux principes : le premier est que le prédicat du prédicat est prédicat du sujet (principe du syllogisme), le second est que tout prédicat est à chaque fois attribué à un sujet selon l'axe d'une certaine catégorie (qualité, manière d'être, relation . . .). Ces deux principes règlent le rapport des prédicats entre eux, en même temps que le rapport d'un prédicat à un substrat. Soit l'exemple du syllogisme de l'éclipse de la Lune : l'éclipse est la privation de lumière de la Lune par l'interposition de la Terre (syllogisme correspondant : La Terre s'interpose devant la Lune, toute interposition de la Terre produit une éclipse, donc la Lune subit une éclipse). Le syllogisme analyse donc une qualité (la perte de lumière de la Lune) par une relation (interposition). Notre perception est par là convertie en une autre perception, mais une perception seulement virtuelle : si nous étions sur la Lune, nous percevrions l'éclipse, et celle-cei n'aurait pas à être démontrée, puisqu'elle ferait l'objet d'une connaissance directe :

> Que la recherche porte toujours sur le moyen, cela résulte manifestement des cas où le moyen terme tombe sous les sens. Nous ne le cherchons, en effet, que parce que nous ne le percevons pas [. . .]. Mais si nous étions sur la Lune, nous ne rechercherions ni si l'éclipse a lieu, ni pourquoi elle a lieu, mais le fait et le pourquoi seraient en même temps évidents. (90a 26)

Le syllogisme apparaît ainsi comme une forme de substitut de l'énoncé perceptif, mais il établit par là même une forme de commensurabilité entre la cause et le fait, entre l'explication et la simple déclaration du phénomène perçu. En suggérant qu'un observateur situé sur la Lune percevrait l'éclipse, Aristote suppose que le champ perceptif s'inscrit sur le fond d'un univers physique et géométrique (régi ici par les mouvements des corps célestes). Le syllogisme trace en quelque sorte un chemin sélectif parmi toutes les associations prédicatives données à la perception pour leur donner l'architecture d'un monde objectif. C'est beaucoup plus vrai pour la biologie que pour les mathématiques : les syllogismes prouvent en quelque sorte que les genres dégagés sont les bons, qu'ils correspondent aux véritables articulations du réel. (Et donc les genres, ou disons plutôt les différentes espèces à l'intérieur d'un genre, sont le fruit des syllogismes en même temps que leur support.)

2 Leibniz

2.1 La syllogistique aristotélicienne

Structure *prédicative* des propositions catégoriques : elles ont toute pour schéma « S est P ». Les propositions catégoriques se distinguent selon leur *quantité* (universelle ou particulière) et leur *qualité*(affirmative ou négative). En croisant ces deux critères, on obtient quatre types de propositions catégoriques :

- Universelle affirmative = "A", p. ex. « Tous les hommes sont mortels ».
- Universelle négative = "E", p. ex. « Aucun homme n'est mortel ».
- Particulière affirmative = "I", p. ex. « Quelque homme est mortel ».
- Particulière négative = "O", p. ex. « Quelque homme n'est pas mortel ».

Inférences immédiates : lien de conséquence logique entre deux propositions, permettant de déduire quelque chose d'une seule prémisse. Ex : $A \rightarrow I$ (Si tous les hommes sont mortels, alors nécessairement quelques hommes sont mortels).

Carré logique :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, dash, "contraires"] \arrow[d, dash, "subalternes"'] \arrow[dr, dash] & E \arrow[d, dash, "subalternes"] \arrow[dl, dash] \\
I \arrow[r, dash, "subcontraires"'] & O
\end{tikzcd}$$

les deux diagonales reliant à chaque fois deux propositions contradictoires (l'une est vraie, l'autre fausse)
(contraires = ne peuvent être vraies en même temps, subcontraires = ne peuvent être fausses en même temps).

L'inférence immédiate relie notamment une proposition avec une modification de celle-ci. Parmi les principales modifications, on trouve l'obversion (l'obverse d'une proposition s'obtient en changeant la qualité de la proposition et en niant le prédicat : on passe ainsi de S est P à S n'est pas non-P) et la contraposition (la contraposée d'une proposition s'obtient en inversant le sujet et le prédicat en niant chacun d'eux : on passe ainsi de S est P à non-S est non-P). Concrètement, la théorie de l'inférence immédiate permet d'aboutir à de nombreuses propositions vraies en construisant des propositions découlant de façon valide d'une prémisse vraie. Par exemple Tous les hommes sont mortels (A) donne : Il est faux qu'aucun homme n'est mortel (E), Quelques hommes sont mortels (I), Il est faux que quelques hommes ne sont pas mortels (O).

Relation de conversion : permutation du S et du P, la proposition obtenue ayant la même valeur de vérité que la proposition initiale. Si l'extension des termes est inchangée, la conversion est dite simple. L'extension du S est déterminée par la quantité de la proposition, et l'extension du P par la qualité (on fixe par convention que dans une proposition affirmative, le P est toujours particulier, et que dans une proposition négative, le P est toujours universel). Les prémisses de la forme E ou I autorisent des conversions simples : par exemple, Aucun mammifère n'est vivipare donne Aucune vivipare n'est mammifère. Si l'extension d'un des termes change, la conversion est dite par accident. Ex : Tous les chats sont gris (A) donne Quelques chats sont gris. (O n'autorise pas de conversion.)

SYLLOGISME proprement dit : les trois termes (ou prédicats) qui interviennent dansun syllogisme sont, par ordre d'apparition : le majeur (a), le moyen terme (b) et le mineur (c). Quatre figures sont *a priori* possibles :

- b est sujet dans la majeure et prédicat dans la mineure (Tout a est b, tout b est c, donc tout a est c).
- b est prédicat des deux prémisses (Tout a est b, aucun c n'est b, donc aucun c n'est a)
- b est sujet des deux prémisses (Tout b est a, tout b est c, donc quelque c est a)
- b est prédicat de la majeure et sujet de la mineure (Tout a est b, tout b est c, donc quelque c est a).

Innovation essentielle d'Aristote : l'emploi de lettres schématiques, acte de naissance d'une logique générale (indéfiniment applicable à des domaines d'objets différents), même s'il n'est pas question de faire de cette généralité l'objet d'une thématisation autre que dialectique. La généralité logique reste implicite, car aucun domaine ne pourrait justement constituer son domaine en tant que théorie déterminée. On pourrait dire que l'analyse des syllogismes prend place chez Aristote dans deux domaines assez opposés : d'une part, celui d'une théorie de la science naturelle (les exemples sont alors significatifs : Les vignes sont des plantes à feuilles larges, toutes les plantes à feuilles larges perdent leurs feuilles, donc les vignes perdent leurs feuilles : voilà exactement le genre d'exemples qui parsèment les SA), d'autre part celui d'une théorie formelle des différents types possibles de syllogismes (syllogistique proprement dite).

Tout syllogisme étant composé de 3 propositions, et chaque proposition pouvant appartenir à l'une des 4 formes de propositions A, E, I, O, il existe $4^3 = 64$ modes syllogistiques possibles. Ce qui intéresse Aristote, c'est de distinguer les formes de syllogismes valides. Aristote reconnaît comme plus fondamentales et évidentes les 4 modes valides de la première figure (AAA, EAE, AII, EIO), appelés syllogismes parfaits. L'idée est de réduire la validité des syllogismes à la validité de ces syllogismes parfaits. Cette réduction se fait à l'aide de transformations dont la principale est la conversion.

Dissertatio de Arte combinatoria (1666) : Leibniz cherche lui aussi à déterminer les modes concluants des différentes figures. Seulement il part des travaux de Hospinianus, qui distingue *quatre* quantités : universelle (U), particulière (P), indéfinie (I) et singulière (S) – ce qui rend l'analyse plus difficile, voire concrètement impraticable sans les ressources de la combinatoire mathématique proprement dite alors naissante. Leibniz se distingue par sa volonté de procéder de façon systématique.

Ceci engage également à distinguer deux sous-déterminations distinctes de la logique par les mathématiques : ces dernières sont à la fois un modèle de la pensée (rigoureuse) et un modèle comme moyen de représentation et d'analyse de la pensée. Ces deux versants sont en droit indépendants : on peut représenter mathématiquement la pensée en général, ou bien analyser non-mathématiquement la pensée mathématique comme modèle de toute pensée rigoureuse. On voit en tout cas en quoi la logique concentre ainsi les rapports délicats existant entre philosophie et mathématiques ; elle en est à la fois le lieu et l'enjeu, en même temps qu'elle permet une circulation entre les deux.

2.2 La combinatoire

Leibniz énonce ainsi le problème fondamental de la Logique de l'invention : « Étant donné un sujet, trouver tous ses prédicats possibles ; étant donné un prédicat, trouver tous ses sujets possibles ». L'idée naturelle est d'analyser tous les concepts, en les définissant, de façon à les réduire ultimement à des combinaisons de concepts absolument simples, notés au moyen de signes quelconques, p. ex des numéros. Les concepts sont ensuite classés par degré de complexité (« ordre ») croissant. Chaque terme composé est une combinaison de termes simples, le produit symbolique des numéros correspondants. On peut également désigner les termes au moyen de fractions : $\frac{n}{m}$ désigne alors le n^{e} terme de la m^{e} classe. Ceci posé, on voit que tous les facteurs d'un terme donné seront les numéros de tous les prédicats de ce sujet. On peut ainsi attribuer à un sujet donné tous ses facteurs premiers (caractères simples), puis chacune des combinaisons de facteurs premiers. En procédant par ordre, suivant la méthode générale de la Combinatoire, on trouvera ainsi tous les prédicats possibles du sujet considéré. On peut notamment calculer le nombre de ces prédicats : si la définition du sujet comporte k termes simples, il y aura en tout $2^k - 1$ prédicats. Réciproquement, étant donné un terme, trouver tous ses sujets possibles revient à trouver toutes les combinaisons qui contiennent une combinaison donnée. Leibniz cherche ensuite à calculer le nombre des prédicats particuliers d'un terme donné, càd le nombre de prédicats qu'on peut lui attribuer par une proposition particulière, Leibniz raisonne ainsi : Une proposition particulière affirmative peut dériver d'une proposition universelle soit par subalternation, soit par conversion partielle (= par accident). Dans la subalternation, le P provient du P, dans la conversion il provient du S. Donc le nombre de prédicats particuliers d'un terme donné est égal à la somme du nombre de ses prédicats universels et du nombre de ses sujets universels.

On voit ainsi en quoi la Combinatoire naît du projet de systématiser la syllogistique aristotélicienne, de la rendre scientifique, et en quoi elle appelle le projet d'un « alphabet des pensées humaines ». d'un côté la transposition des vertus calculatoires des mathématiques, de l'autre visée d'une analyse générale de la pensée (de toutes les vérités possibles). Leibniz croise la combinatoire générale aristotélicienne et y greffe les méthodes de la combinatoire mathématique de son temps ; ce genre de croisement est caractéristique de sa démarche.

2.3 Caractéristique universelle

Lettre à L'Hospital du 28 avril 1693 : « Une partie du secret de l'Analyse consiste dans la caractéristique, c'est-à-dire dans l'art de bien employer les notes dont on se sert ». Caractéristiques = art du symbolisme permettant de représenter les idées au moyen de caractères (= signes écrits), *de façon à servir au raisonnement* ($\neq$ langue universelle). Pour Leibniz, l'Arithmétique et l'Algèbre sont des échantillons de sa caractéristique (ce qui selon lui montre qu'elle est réalisable). Si la Géométrie est relativement moins avancée, c'est parce qu'elle a manqué jusqu'ici de caractères propres à représenter les figures. Cas du calcul infinitésimal : représentation adéquate des quantités et de leurs relations. Comme le remarque Leibniz lui-même dans sa « Nouvelle méthode pour chercher les Maxima et les Minima ... » (oct 1684) : « Remarquons que dans ce calcul x et dx sont traités sur le même pied, de même y et dy, ou toute autre lettre indéterminée et sa différentielle[1] » (x = abscisse, dx = segment de droite arbitraire sur l'axe ; v = ordonnée d'une courbe notée VV, dv = segment qui soit avec dx comme v avec XB (càd VV$_x$)) : d apparaît à la fois comme un opérateur sur des fonctions, et une quantité, et cette souplesse du symbolisme est pour beaucoup dans l'efficacité du calcul différentiel lui-même.

L'essentiel d'une bonne caractéristique consiste à représenter les idées complexes par des combinaisons de signes correspondant à leurs éléments, de façon à exhiber la composition logique. Caractéristique = fondement du *calculus ratiocinator* (calcul qui dirige la déduction de manière infaillible, par une manipulation de symboles conformément à des règles strictes). Paradigme du symbolisme arithmétique : représentation des idées simples par des nombres premiers, et comparaison de 'analyse à une décomposition en facteurs premiers (cf. système de « nombres caractéristiques » dans les Éléments de Calcul logique d'avril 1679). Théorie générale des symbolismes (Leibniz envisage également de recourir à un symbolisme géométrique[2]).

Leibniz conçoit la Logique, au sens le plus large, comme un art de penser mais également comme un art d'inventer. Au premier versant revient la démonstration des vérités déjà découvertes, et au second la découverte de vérités nouvelles par une méthode sûre et systématique. Mais la véritable division de la Logique est entre l'Analyse et la Synthèse.

[1][Leibniz, 1995], p. 106.

[2]Cf. p. ex « Supplément à l'échantillon de calcul universel », [Leibniz, 1998b], p. 95.

2.4 Calcul logique

Format fondamental : B appartient à A (le prédicat est dans le sujet, *inesse*). Je propose de prendre pour principale illustration du calcul logique leibnizien les *Recherches générales sur l'analyse des notions et des vérités* (1686). Données de base des *Recherches générales* :

- « *A coïncide avec B* si l'un peut être substitué à l'autre *salva veritate* ou si, lorsqu'on les résout tous les deux en substituant aux termes leurs valeurs (c.-à-d. leur définition), les mêmes valeurs apparaissent de part et d'autre [...][3] ».

- « Notion suivante : A est *sujet* et B *prédicat* si B peut être substitué à A *salva veritate*, autrement dit si les termes que la résolution fait apparaître dans B apparaissent aussi dans A. Ceci peut être expliqué autrement, à savoir : A *est* B si *tout* A et $quelqueB$ coïncident. » (*ibid*) On obtient ainsi : A coïncide avec B, A est B.

- §4 : « Est une PROPOSITION : *A coïncide avec B*, *A est B*, [...] *A ne coïncide pas avec B*. »

- : A coïncide avec A, A ne coïncide pas avec non-A : propositions vraies par soi.

- A est B signifie Tout A est B. Quelque A est B ? A est B signifie : *A coïncide avec BY*, càd : *A est coïncident avec quelque B*, càd $A = BY$ (§16). On en déduit (§27) : *Quelque B* = YB.

- §17 : « Par suite, les propositions *A est B* et *quelque B coïncide avec A* coïncident, c.-à-d. $BY = A$. »

- §§20-25 : règles de la syntaxe (Toute composition de lettres peut être remplacée par une lettre, A toute lettre définie on peut substituer une lettre indéfinie qui n'a pas encore été utilisée, etc.).

- §36 : $A = B$ donc $AA = BA$, donc $A = BA$, donc *A est B*. Ainsi $AB = A$ est l'expression parfaite de A est B. Mais AB est A (ou AB est B) est en revanche une proposition identique.

- §112 : introduction de $\overline{Y}$ pour souligner le caractère quelconque. Ainsi, *$\overline{Y}$ est Y* signifie : un Y quelconque contient cet Y. Quand je nie *$\overline{Y}A$ est B*, càd *un A quelconque est B*, j'affirme Quelque A n'est pas B (il est faux que tout A soit B), et non Aucun A n'est B.

- §128 : $A = AB$ est l'universelle affirmative, $AB = AB$ est la particulière affirmative, A = A *non-B* est l'universelle négative et A *non-B* = A *non-B* est la particulière négative. « Et nous avons ainsi enfin totalement éliminé l'indéfini Y, ce que nous avons également appris grâce aux nombres. » Les termes indéfinis sont comme des éléments idéaux qui rappellent la « méthode de détour » employée par certains algébristes : ce sont des caractères dont on peut tirer parti dans le calcul, mais auxquels aucune dénotation déterminée ne peut être assignée, de sorte qu'il est bon de s'assurer qu'on peut les éliminer à la fin du calcul.

- §56 : « Je définis VRAI en général ainsi : A est VRAI si, en posant pour A sa valeur, et en traitant de la même manière tout ce qui intervient dans la valeur de A (si tout au moins c'est possible), on ne rencontre jamais *Bnon-B*, c.-à-d. une contradiction. » Ainsi A est vrai, A est une chose, A est un être, A est, sont autant de façons d'exprimer que A n'enveloppe pas de contradiction et est à ce titre logiquement réel (existant-possible). Leibniz distingue entre un énoncé L et un énoncé « de seconde intention » tel que « L

[3] [Leibniz, 1998b], p. 217.

est vrai » (cf. §1). Cependant la vérité ou la possibilité fonctionne comme n'importe quel prédicat et n'est pas un opérateur de second niveau.

- Etc.

L'objet des *Recherches générales sur l'analyse des notions et des vérités* (1686) est principalement d'élaborer un calcul logique traitant de manière homogène des concepts (ou notions) et des propositions. Dans cette perspective, l'être signifie à la fois le genre le plus vaste à partir duquel se définit tout terme (chose), et la non-contradiction d'un terme ou d'une proposition (possibilité). Ces deux aspects sont liés : tout terme se définit comme ce qui peut constituer le sujet ou le prédicat d'une proposition, tandis qu'une proposition n'a de valeur de vérité qu'à la condition de viser quelque chose : si l'un des termes auxquels fait référence un énoncé n'est pas possible, cet énoncé n'est plus ni vrai ni faux. Tout terme donne lieu à une proposition. À tout A correspond en effet la proposition A *est* V (où V désigne un prédicat « redondant »), càd A est identique à quelque vrai ($A = VY$), à savoir à ce vrai qu'il est. Réciproquement, toute proposition donne lieu à un terme. Par exemple, *Quelque* A *est* B devient AB *est quelque chose* [est res], *Tout* A *est* B devient A *non-*B *n'est pas* [non est res].

Ce traitement parallèle des termes et des propositions conduit Leibniz à postuler le terme d'être comme opérateur primitif (*ens* ou *est res*), et semble le contraindre à entériner l'identification de l'universalité et de la nécessité. En effet :

A est B est nécessaire (comme proposition) ssi A *non-*B est impossible (comme terme) ssi A *non-*B *non est res* ssi *Tout* A *est* B.

Pourtant, Leibniz refuse explicitement cette conséquence :

> Une proposition impossible est une proposition dans laquelle intervient un terme [contradictoire] ; une proposition possible est une proposition qui n'est pas impossible. Est-ce que, dès lors, toute universelle négative est impossible ? Si c'est apparemment le cas, c'est que les propositions sont conçues relativement aux notions et non aux choses existantes. Si je dis par exemple *aucun homme n'est animal*, je ne conçois pas seulement cette négation relativement aux hommes existants, elle implique au contraire que ce qui est nié à propos d'un individu singulier, comme Pierre, est nié à son propos de manière nécessaire. Il faut donc nier que toute universelle négative est impossible et l'on répondra à l'objection que *A contient non-B* est prouvé, que ce soit par une démonstration, c'est-à-dire par une résolution achevée, ou seulement par une résolution qui peut être poursuivie à l'infini et qui reste donc toujours inachevée ; l'énoncé est alors certain mais en vérité non nécessaire parce qu'il ne peut jamais être ramené à l'identique ou son opposé au contradictoire.
> Est donc vrai ce qui peut être prouvé [. . .]. Est nécessaire ce qui est ramené à l'identique par la résolution.[4]

Une proposition universelle négative, *Aucun* A *n'est* B, n'énonce pas comme telle une impossibilité (celle d'être à la fois A et B) : c'est le cas seulement si le contenu des termes rend raison de l'universalité, c'est-à-dire si A contient *non-*B et peut être prouvé contenir *non-*B au moyen d'une résolution finie. Le critère de la finitude de l'analyse permet ainsi de distinguer entre vérité et vérité proprement nécessaire : *(Tout)* A *est* B cesse d'être comme telle nécessaire.

Ce desserrement de la superposition de l'universalité et de la nécessité ne tient pas seulement à une redéfinition *ad hoc* : il renvoie au statut singulier de l'être dans la perspective logique qui est celle de Leibniz dans les *Recherches générales* : *est* (une chose) tout terme « vrai » ou « possible », c'est-à-dire tout terme qui n'est pas impossible. Qu'est-ce qu'un terme impossible ? C'est un terme contenant à la fois B et *non-*B, . . . B étant un terme possible[5] ! La possibilité d'un terme est donc une notion pour une part irréductible, sauf à déclarer possible toute notion simple, en supposant achevée une analyse intégrale de toutes les notions que le calcul logique a justement pour but de court-circuiter (dans la mesure où la plupart des inférences peuvent être tirées au moyen d'une analyse seulement partielle des notions concernées). Pour

[4] §§130-130bis, [Leibniz, 1998a], p. 275.
[5] Cf. §44.

autant, la possibilité d'un terme ne signifie nullement le minimum d'être qu'il faut attribuer à toute chose, même impensable, pour la dire éventuellement ensuite impensable. Le possible ne signifie aucun suppôt meinongien sous-jacent aussi bien à l'être qu'au non-être, puisqu'une conjonction de termes contraires désigne bien quelque chose d'absolument impossible. L'être dont il est question est à la fois à mi-chemin de l'existant et du possible, et en fait hétérogène à eux. D'un côté en effet, Leibniz refuse de situer l'existant et le possible dans des sphères ontologiques différentes (§73), de sorte qu'un terme est pourvu d'une extension tantôt réelle, tantôt « essentielle ». Mais, d'un autre côté, l'être ou le vrai ne renvoie à aucune extension assignable. Les termes vrais ne sauraient être circonscrits par la condition de la coïncidence avec soi : $A = A$ indique la possibilité de A, mais, comme Leibniz en fait lui-même la remarque au §152, $A = A$ reste une proposition comme les autres, dont l'assertion par conséquent *présuppose* la possibilité de A. La possibilité, dans les *Recherches générales*, ne peut avoir que le statut d'une présomption : par exemple, *Quelque A est B* se formule[6] : « $AB = AB$ en posant que AB est une chose » (preuve que le fait d'être une chose signifie autre chose qu'une existence, réelle ou même logique). La sphère du possible n'est pas davantage couverte par une variable de terme : si Leibniz introduit le terme Y pour désigner un terme quelconque, c'est essentiellement dans le contexte de la *démonstration* de la règle de conversion selon laquelle la négation d'une particulière affirmative est l'universelle négative correspondante. Le terme indéfini Y permet de désigner *quelque A* au moyen de l'expression AY, de sorte que *quelque A est B* se dit : AY *est* B. En introduisant un « tiret » conférant à Y l'acception du quelconque, Leibniz peut traduire *aucun* A *n'est* B par : $A\overline{Y}$ *n'est pas* B. Cette manipulation symbolique a deux avantages : elle permet de convertir toute proposition affirmative « infinie » (c'est-à-dire toute proposition contenant un terme négatif, comme A *est non-*B) en une proposition négative définie ($AY \neq ABY$)[7] ; elle permet en outre de rendre directe l'identité de la négation de *quelque* A *est* B, *i.e.* AY est B *est faux*, *i.e.* AY *n'est pas* B, avec *aucun* A *n'est* B, *i.e.* $A\overline{Y}$ *n'est pas* B[8]. Leibniz juge toutefois qu'une indéterminée telle que Y est en principe éliminable du calcul[9].

Le recours à l'opérateur de vérité (permettant de faire correspondre à tout terme A la proposition A *est quelque vrai*, $A = VY$, notée comme terme $\overline{AV}$), au §108, comme le recours à l'opérateur de possibilité (défini par : A *est possible* si et seulement si $A \neq A : A$), aux §§124-129, prennent place dans le contexte d'un parallèle établi entre analyse logique et arithmétique. Disons simplement que V sert à marquer le degré de complexité des notions intervenant dans une proposition représentée sous la forme d'un terme composé (§108) : son application est donc directement liée ici à l'élaboration d'une algèbre des concepts. L'idée est que tout terme A donne naissance à une proposition à laquelle il est identifiable, à savoir A *est identique à cet être*, ou A *est identique à ce vrai* : A est V, soit $A = VY$. Leibniz écrit : « *Et le 'ce vrai'* a ici la même fonction que l'unité dans l'arithmétique qui sert à remplir les places, c'est-à-dire les dimensions. » En effet, les termes peuvent être changés en propositions, mais la différence des termes complexes et des termes simples doit être préservée. D'où la seconde fonction du concept tautologique V : il permet une représentation des propositions emboîtées dans laquelle figure le degré de complexité des notions. En ajoutant des V reliés par une barre supérieure à d'autres lettres, on augmente le degré de complexite des termes représentés par ces lettres, ce qui permet de les mettre en liaison avec des termes plus complexes tout en respectant a règle selon laquelle « un terme ne peut être joint qu'à un terme également complexe ou incomplexe ». (Par ailleurs, l'introduction du terme $A : B$ ($A : B$ est = A est divisible par B = A ne contient pas le contraire de B = (A et *non-*B) admet une instance possible) a pour principal intérêt aux yeux de Leibniz de valider les règles de conversion traditionnelles (§129) : de manière géné-

[6]§165.
[7]§87. On peut ainsi espérer éliminer progressivement toute référence à des termes négatifs.
[8]§112.
[9]§§89, 129, 162.

rale, les sous-déterminations de l'analyse leibnizienne sont multiples, et ce n'est pas toujours la même qui joue lorsqu'on passe d'une piste suivie par Leibniz à une autre.)

Dans les *Recherches générales*, l'opérateur *est res* confère aux lettres A, B, ..., leur statut de variables non pas formelles mais « ontologiques » (dans ce cas, le possible, c'est l'être en général), en même temps qu'il exprime la valeur assertive de la proposition (dans ce cas, le possible, c'est la vérité, ou du moins la possibilité de la vérité). On a pu voir dans cette double fonction une tension fatale à l'œuvre logique de Leibniz[10]. Toutefois, A *non-*B *non ens* n'est pas une abréviation pour *(*A *ens non-*B *ens) non ens* : c'est plus ou moins le cas uniquement lorsque c'est le prédicat V qui est employé, mais on est alors dans le contexte spécial d'une tentative de transposition de moyens de représentation arithmétiques (cf. §107-108). Hors de ce contexte, il ne peut y avoir d'ambiguïté entre deux types d'occurrences (prédicatives et propositionnelles) de *ens*, et de surcroît il n'existe pas de divergence *a priori* entre expression de la généralité (supportée par l'introduction de Y) et valeur assertive, entre « représentation des relations et règles d'inférence propres aux mathématiques » et « syntaxe prédicative[11] », sauf à *postuler* une dichotomie insurmontable entre abstraction et visée objective : tout le propos de Leibniz (et plus tard de Frege) est justement de montrer que les formes abstraites de jugements constituent des objets d'étude à part entière : les objets de cette science à part entière qu'est la logique.

L'essentiel est que ni $A = VY$ (A est quelque vrai), ni $A \neq A : A$, ni $A = A$, ne permettent l'élimination de l'opérateur d'être exprimé par *est res*. La possibilité de toute notion intervenant dans une proposition assertée, même celle qui chercherait à exprimer la possibilité d'un terme, doit être supposée (§§152-153). Cet opérateur d'être, qui est tout aussi bien un opérateur d'existence (*est res*) ou de vérité (*est verum*), traduit l'institution d'une sphère logique d'être, voire celle d'une sphère d'être logique, étranger à la spécification en « existant » ou « possible » et au sein de laquelle termes et propositions sont également plongés. De plus, il faut remarquer que *ens* et *verum* sont ici des constantes du calcul, et des termes qui se prédiquent (de n'importe quel terme) comme n'importe quel autre terme : ce sont seulement les concepts les plus généraux, et ils ne fonctionnent pas comme des concepts de second ordre. Ceci dit, autant V se laisse prédiquer sans problème, autant *est res*, du fait de signifier le fait de ne pas contenir de conjonction contradictoire, constitue une notion de niveau supérieur. Leibniz a certainement eu l'intention de réduire autant que possible la différence entre de tels énoncés réflexifs et les énoncés directs, mais cette intention a eu pour résultat l'introduction de notions modales. Ce qui nous reconduit à la question du début (sur la valeur modale de l'universalité).

Quoi qu'il en soit, on peut finalement faire état d'une universalité logique dont le propre est 1°) de supposer une sphère d'être indifférenciée, étrangère à la distinction entre existence actuelle et possibilité ; 2°) d'incorporer les propositions (ou vérités), en particulier universelles, aux objets des propositions (ou notions)[12]. Ces deux éléments constituent deux traits importants d'une conception spéculative, proprement philosophique, de la logique (cf. Russell) – au sein même d'une entreprise de « Calcul logique ».

Aux §§138-143 des *Recherches générales*, Leibniz cherche à transformer les propositions en termes (A *est* B devient *le '*A *est* B*'*, mais il est impossible de conserver l'indication de la quantité et de la qualité des termes, et on perd du coup les inférences syllogistiques. En

[10][Imbert, 1993], p. 130.

[11]*Ibid.*

[12]Cf. §75 : « Si, comme je l'espère, je peux concevoir toutes les propositions comme des termes et toutes les propositions hypothétiques comme des propositions catégoriques, et si je peux toutes les traiter universellement, cela promet une admirable facilité pour ma caractéristique et pour mon analyse des notions et cela constituera une invention d'une très grande importance. [...] J'entends donc par A soit un terme incomplexe, soit une proposition, soit une déduction ; soit une déduction de déduction, etc. D'une manière générale, est donc vrai un terme qui peut être parfaitement conçu. »

§109 : « De même que tout terme peut être conçu comme une proposition, comme nous l'avons expliqué, de même aussi toute proposition peut être conçue comme un terme. Ainsi par exemple *l'homme est quelque animal* est vrai, est la proposition, est comme ceci, est la cause, est la raison, etc. »

revanche (§144), toute proposition peut être considérée comme un terme si elle est exprimée sur le mode du *secundi adjecti*, càd si (A *est* B devient AB *est un être*. Ceci donne, dans « Quelques difficultés logiques » ([Leibniz, 1998b], p. 371) :

(1) Tout A est B : A non-B est *non ens* : $AB = A$
(2) Quelque A n'est pas B : A non-B est *ens* : $AB \neq A$
(3) Aucun A n'est B : AB est *non ens* : $AB \neq AB$ *ens*
(4) Quelque A est B : AB est *ens* : $AB = AB$ *ens*.

La dissymétrie entre (1) et (2), d'une part, et (3) et (4) d'autre part (qui requièrent de façon inéliminable la mention de *ens*) est gênante. Cependant, dans les *Recherches générales* (§§151-152), l'adjonction indispensable de *ens* ou *est res* est contournée :

Tout A est B : A non-B *non est res* : A non-$B \neq A$ non-B
Quelque A n'est pas B : A non-B *est res* : A non-B = A non-B
Aucun A n'est B : AB *non est res* : $AB \neq AB$
Quelque A est B : AB *est res* : $AB = AB$.

Or à propos de la possibilité d'exprimer la fausseté de « A est B » par « $AB \neq AB$ », Leibniz fait le commentaire suivant :

> « Mais ceci présuppose que toute proposition dans laquelle intervient un terme qui n'est pas une chose est niée. Ainsi, il reste que toute proposition est toujours vraie ou fausse, mais désormais toute proposition à laquelle il manque la *constantia subjecti*, c.-à-d. un terme réel est, est fausse. Ceci est un peu éloigné de la manière naturelle de s'exprimer dans le cas des propositions existentielles. Mais pour ma part, je ne vois là aucun motif d'inquiétude, dans la mesure où je recherche des signes appropriés et où je n'établis pas comment on doit leur appliquer les noms de l'usage courant[13].

C'est la preuve que le calcul logique leibnizien peut réellement être dit tenter une forme de synthèse entre des objectifs de logique générale, et des contraintes calculatoires liées à la mise en place d'une logique inspirée des mathématiques. (En l'occurrence cette synthèse peut être amenée à faire violence à « l'usage courant », au profit du calcul, en éliminant le terme non calculatoire *ens* de (3) et (4).)

3 Boole

The mathematical analysis of logic (1847), An investigation of the laws of thought (1854). Introduction de Mathematical analysis : « Nous ne devons plus associer la logique à la métaphysique, mais aux mathématiques [...]. Comme la géométrie, la logique repose sur des vérités axiomatiques, et ses théorèmes sont construits selon la théorie générale du symbolisme qui constitue le fondement de ce qui est reconnu comme l'analyse » (Introduction, p. 13). Idée d'un calcul algébrique logique. C'est autre chose que ce qui est par la suite devenu la logique mathématique. L'idée est d'émanciper le calcul de toute application aux nombres, pour embrasser d'autres types d'entités. Dans son Analyse mathématique de la logique, Boole remarque que la validité des vérités de l'algèbre symbolique « ne dépend pas de l'interprétation des symboles qui y sont employés, mais seulement des lois de leur combinaison. Tout système d'interprétation qui n'affecte pas la vérité des relations supposées est également admissible ». Une même analyse peut correspondre à la solution d'un problème d'arithmétique, de géométrie ou de dynamique : « Ce principe est vraiment d'une importance fondamentale ». Idée de l'axiomatique. La logique comme théorie (étude) des formes de théories. Le calcul logique met en jeu des « formes d'analyse », ou lois algébriques des opérations de pensée en général.

Pour permettre un traitement algébrique de la pensée telle qu'elle s'exprime dans notre langage, Boole cherche d'abord, en partant du raisonnement algébrique qui opère sur des signes, à classer ces signes d'après leur fonction, pour ensuite retrouver l'analogue de ces fonctions dans

[13][Leibniz, 1998a], §153.

les formes du langage ordinaire et traduire celles-ci en des opérations analogues aux opérations algébriques classiques. Syntaxe : des symboles littéraux x, y, etc., qui représentent les choses considérées (noms, adjectifs, descriptions) ; des signes d'opération, tels que $+$, $\times$, etc. qui représentent les opérations de l'esprit par lesquelles les conceptions des choses sont combinées ou résolues (connexions logiques : et, ou, etc.) ; le signe de l'identité, $=$ (tous les verbes, reconduits à être). L'interprétation attendue (même si elle est en même temps la forme de toute interprétation particulière) est : x = classe, opérations = opérations sur des classes (combinaison de parties en un tout, séparation d'un tout en parties), et $=$ est l'identité (extensionnelle) entre classes. D'où un calcul logique analogue au calcul algébrique :

- $xy = yx$: moutons blancs = blancs moutons
- $x + y = y + x$: A et B = B et A
- $z(x + y) = zx + zy$: les Européens (hommes et femmes) = les Européens hommes et les Européens femmes
- $z(x - y) = zx - zy$: les Européens (les hommes, mais non les femmes) = ...

L'algèbre obtenue vérifie : $x^2 = x$ (la classe des Français français est identique à la classe des Français). Autrement dit les symboles littéraux x, y, etc. peuvent être conçus comme ne recevant que la valeur 0 ou 1. Structure moderne d'algèbre de Boole. Quelle est son interprétation logique ? Les symboles littéraux représentent des classes (extensions de concepts), la somme est la réunion, et la multiplication l'intersection. 1 est la classe universelle, 0 la classe nulle. Du coup $1 - x$ devient le complémentaire de x, et le principe de contradiction devient l'*égalité* $x(1 - x) = 0$. De même, $xy = 0$ signifie : nul x n'est y. On peut ainsi considérer des termes de complexité indéfinie. On peut en outre examiner toutes les combinaisons possibles entre n termes donnés, et examiner ensuite toutes les égalités qui peuvent être déduites des prémisses. Par exemple, pour x, les 2 termes sont $x+(1-x)$; pour x et y, les 4 termes sont $xy+x\overline{y}+\overline{x}y+\overline{xy}$. Supposons que Tout x est y et Nul z n'est y, soit $x\overline{y} = 0$ et $zy = 0$. La syllogistique donne : Nul z n'est x, soit $zx = 0$. Mais en fonction des 8 combinaisons engendrées par x, y et z, on a les deux équations suivantes, que Boole appelle le *développement* des données du problème :

$$x\overline{y}z + x\overline{yz} + xyz + \overline{x}yz = 0$$
$$xy\overline{z} + \overline{x}y\overline{z} = \overline{xy}z + \overline{xyz} = 1$$

En éliminant ensuite chacun des termes nul en vertu des prémisses, on obtient non seulement $zx = 0$, mais également $x\overline{yz} = 0$ ou $xy\overline{z} = 1 \neq 0$ (il y a un x qui est y sans être z), etc.

Tout problème de logique est ainsi traduit dans le calcul algébrique, les données algébriques sont alors résolues librement (aveuglément), puis les résultas du calcul sont retraduites dans le langage logique initial. Ce calcul algébrique ne se réduit pas à un calcul des classes : Boole envisage d'interpréter les termes par des propositions, l'addition par la disjonction, etc. Si le calcul des propositions est bivalent, ce n'est pas le cas du calcul des classes. Boole introduit la lettre v pour désigner une classe (indéterminée) distincte à la fois de 0 et de 1. C'est à la fois une classe et une classe distincte de toute classe déterminée, c'est une sorte de classe générique en plus des variables de classes.

Boole reste dans la perspective du calcul numérique (attachement de Boole à trouver des inverses pour toutes les opérations, p. ex). Ce n'est pas gênant dans la mesure où le calcul n'est qu'un détour : une progression permettant d'aller des prémisses à une conclusion, mais dont les différentes étapes n'ont aucun sens logique. En cela le calcul booléen est moinsune représentation de la pensée logique, qu'ne application de l'algèbre quantitative à la logique. Le paradigme des équations numériques demeure directeur, alors même qu'il s'agit d'expliciter un calcul généralisé dont toute résolution dans un domaine particulier (comme justement le calcul numérique) devrait n'être qu'une application. En cela le calcul booléen atteste la sous-détermination tendancielle de la logique par les mathématiques : les mathématiques sont à la fois une non-pensée (une abstraction), et le modèle de la pensée rigoureuse.

4 Frege

Faisant référence à des textes de Leibniz lié aux *Recherches générales* (« Supplément à l'échantillon de calcul universel », « Échantillon élégant de démonstration dans les abstraits »), Frege reconnaît l'ambition d'un « *calculus ratiocinator* », mais ajoute :

> En laissant de côté ce qui est moins important, je me borne à mentionner en outre que Leibniz laisse apparaître les mots « non » et « ens » dans ses formules. Il avait sûrement en tête avec cette tentative la *lingua characteristica*, même s'il n'a établi aucun lien apparent avec les efforts qu'il axait sur l'expression d'un contenu[14].

D'une certaine manière, Frege ambitionne une forme de synthèse entre *calculus* et *lingua*, seulement esquissée ou ambitionnée par Leibniz, dont le patronage est tout à fait significatif :

> Quiconque demande que la liaison des signes de trouve avec celle des choses dans le plus complet accord possible, ressentira toujours comme un renversement du véritable état de choses, le fait que la logique emprunte ses signes à l'arithmétique, la logique dont l'objet est la pensée correcte, le fondement également de l'arithmétique. Il lui semblera plus approprié de développer à partir de la nature propre de la logique ses propres signes [...]. Présentons maintenant par contraste les buts de mon idéographie. J'y ai eu dès le début à l'esprit l'*expression d'un contenu*. Le point de mire de mes efforts est une *lingua characteristica* d'abord pour les mathématiques, non un *calculus* limité à la pure logique. Mais le contenu doit être rendu de façon plus précise qu'à l'aide du langage des mots. [...] Une *lingua characteristica* doit, comme dit Leibniz, *peindre non pas les paroles mais les pensées*. Les langages formulaires mathématiques s'approchent beaucoup plus de cet objectif, et même ils l'atteignent partiellement. Mais celui de la géométrie reste encore tout entier à développer, et celui de l'arithmétique même ne suffit pas pour son propre domaine. [...] Le problème se pose ainsi de mettre en place des signes pour les relations logiques qui soient aptes à fusionner avec le langage formulaire mathématique, et ainsi de former, au moins pour un domaine donné, une idéographie complète[15].

Critiquant la subordination de la logique à l'arithmétique proposé par Boole, Frege vise une véritable langue logique, c'est-à-dire l'expression exacte de contenus de jugement, et la représentation de leurs relations logiques. Mais cette langue doit également être taillée aux dimensions du calcul mathématique : le format bidimensionnel reprend celui des preuves arithmétiques.

Introduction de la *Begriffschrift* (BS) ou *Idéographie* : « J'entends par contenu conceptuel cela seul qui importe à la preuve, et cela doit demeurer présent à l'esprit si l'on veut ne pas se tromper sur ce qui est au cœur de mon langage formulaire ». Un concept est le schéma d'un contenu de jugement, en tant que partie prenante d'une preuve. Priorité des jugements sur les concepts. Les concepts cessent d'être des représentations discursives, pour devenir des *fonctions logiques obtenues par abstraction à partir de contenus de jugement*. Les deux autres innovations marquantes de la BS sont une *écriture quantificationnelle* nécessaire pour l'expression des mathématiques modernes, et un *symbolisme bidimensionnel* qui prend d'emblée une preuve comme unité de mesure discursive : tout contenu de jugement n'existe lui-même qu'à une certaine place dans un arbre de preuve. La BS entend analyser et faire fonctionner l'appareil des preuves logiques. Pour cela, il convient de mettre au point un moyen de représenter les preuves formelles en tant que telles.

Begriffschrift. Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens : une langue formulaire de la pensée pure construite sur le modèle de l'arithmétique.

L'œuvre tout entière de Frege peut être considérée comme poursuivant l'analyse révolutionnaire d'une seule question, le fondement de l'arithmétique. En mathématiques, cette analyse déboucha sur la première définition satisfaisante du nombre cardinal et de la suite des ordinaux, ainsi qu'une théorie non formelle des ensembles reprise (bien que modifiée) par Zermelo. En logique, Frege créa le calcul axiomatique des propositions, la théorie de la quantification et les rudiments de la syntaxe logique (constantes, variables, fonction, argument). Enfin, en com-

[14][Frege, 1994], p. 18.
[15][Frege, 1994], p. 21-22.

posant la proposition à partir d'un concept saturé par un argument, il mit fin à l'aristotélisme consistant à analyser tout énoncé en une combinaison de termes (sujet & prédicat), et à l'ontologie associée à cette analyse. Toute la logique héritée d'Aristote était une logique fondée sur la considération des individus, suppôts logiques de la prédication. Frege au contraire dégage les concepts comme le cœur des propositions et fait par exemple d'une proposition universelle une propriété de concept plutôt qu'une propriété des individus concernés.

D'un côté, Frege s'inspire de l'articulation fonction/argument qui prévaut en arithmétique, et, par un régime d'inférences immédiates par substitutions, Frege cherche à approximer l'écriture et le raisonnement de l'arithméticien. Il s'agit d'analyser l'arithmétique en en épousant le cours. Mais d'un autre côté, Frege ne veut pas demander à l'arithmétique d'analyser l'arithmétique (ce serait circulaire), mais ambitionne de représenter des lois logiques (lois de la pensée pure) valables sans limitation, et donc en particulier pour l'arithmétique. Il s'agit essentiellement de représenter les relations logiques aussi clairement que l'arithmétique signale ses opérations. En cela, Frege s'attache à dégager du masque du langage ordinaire l'organisation de la pensée selon un projet de logique « de la pensée pure ». On retrouve (cf. p. 2.4) la synthèse ou du moins la tentative de synthèse en jeu chez Leibniz : l'idéographie ambitionne de constituer une syntaxe générale à la fois apte à ressaisir le fonctionnement des démonstrations mathématiques et corrigeant (en l'affranchissant de tout contexte discursif particulier) la syntaxe du langage ordinaire (c'est dans cette dernière brèche que la philosophie analytique tout entière s'est engouffrée en devenant « philosophie du langage »).

La modification du symbolisme introduite par Frege induit en tant que telle une révolution en logique. La logique traditionnelle héritée d'Aristote fonctionnait dans la mesure où elle restait cantonnée à des propositions simples. Les choses deviennent beaucoup plus délicates dans le cas de propositions beaucoup plus complexes, telles qu'on en trouve en mathématiques : les propositions *relationnelles*, et les propositions impliquant à la fois une *généralite multiple* (présence de plusieurs quantificateurs – càd de plusieurs occurrences de *pour n'importe quel* x ... et de *il existe au moins un* x *tel que* ...). Exemple « Tout nombre naturel admet un successeur ».

Acquis de la BS : union de la logique et des mathématiques (arithmétique) : le principe de récurrence est ressaisi par des moyens purement logiques, en même temps que la logique est inspirée du modèle arithmétique. Ceci n'interdit pas une dimension discursive, seulement cette discursivité n'est pas nécessairement d'ordre empirique, l'objectivité ne signifie pas nécessairement l'expérience. Il y a bien l'ambition de dégager une sphère de la pensée pure. L'expression est vague chez Frege dans la mesure où l'applicabilité de l'arithmétique est en quelque sorte consubstantielle au concept de nombre tel que Frege l'analyse. Néanmoins cette analyse est postérieure à la BS, et on peut juger que la dichotomie est mal posée, que les mathématiques nous montrent que leur objectivité consistent justement en la résistance (càd à la fois la cohérence, la générativité, la difficulté, la fécondité) d'un appareil de preuve qui n'a rien à voir avec une objectivité gagée sur des « objets ».

5 Logicisme

5.1 Logicism in general

Oxford Handbook (Demopoulos-Clark + Rayo) (Klement) Heijenoort (Synthese 17).

5.2 Frege

Macfarlane + Tappenden sur Frege Weiner Neo-Fregean logicism : Hale-Wright (in Oxford Handbook)

5.3 Russell

HYLTON (Cambridge Companion)

Logicisme = doctrine selon laquelle toutes les mathématiques sont réductibles à la logique, à la fois d'un point de vue définitionnel (tous les concepts mathématiques sont définissables en termes purement logiques) et démonstratifs (tous les théorèmes mathématiques sont démontrables a partir d'axiomes purement logiques au moyen de règles d'inférence purement logiques). Exemple : « Il existe au moins deux choses qui sont P » peut être remplacé par un énoncé ne contenant que des constituants logiques, à savoir $\exists x \exists y\ (x \neq y \wedge Px \wedge Py)$, et on peut de même définir « Il existe exactement deux choses qui sont P » par : $\exists_2 x\ Px := \exists x \exists y\ (x \neq y \wedge \forall z\ (Pz \leftrightarrow (z = x \vee z = y)))$. Et de même pour $\exists_3 x$, $\exists_4 x$, etc. Alors, en introduisant des quantificateurs de second ordre, on peut finalement traduire $2 + 3 = 5$ par :

$(\exists_2 x Px \wedge \exists_3 x Qx \wedge \neg\exists x\ (Px \wedge Qx)) \to \exists_5 x(Px \vee Qx)$,

et prouver un tel énoncé en suivant des règles de simple logique. On voit ainsi que toute vérité mathématique, de proche en proche, peut être reconduite à une vérité logique. C'est du moins ce que pretend montrer les entreprises philosophiques rassemblées sous le titre de « logicisme ». L'avantage philosophique d'une telle position est de conclure que l'ontologie mathématique est réductible à l'ontologie (vide) de la logique, et par conséquent qu'il n'est nul besoin de supposer l'existence de mystérieuses entités mathématiques. Le second avantage est de conclure que la connaissance mathématique est identifiable à un type de connaissance logique, ce qui permet en meme temps d'expliquer la certitude particulière attribuée aux mathématiques. Tout le problème bien entendu est de savoir si l'entreprise logiciste peut être menée à bien, et avant tout quelle est la logique retenue pour mener à bien cette entreprise (s'il s'agit de mathématiques déguisées en logique, la réduction logiciste perd bien entendu tout intérêt).

On l'a vu, Leibniz peut être considéré comme un ancêtre du logicisme. Leibniz distingue deux catégories de vérité : les vérités primaires et les vérités secondaires. Les premières sont les vérités logiques expresses, elles sont du type « A est A » ou du type « A n'est pas non-A ». Toutes les autres vérités, selon Leibniz, sont réductibles à ces vérités primaires au moyen de définitions, c'est-à-dire par l'analyse des notions concernées. Pour Leibniz donc, non seulement toute vérité mathématique, mais toute vérité en general, peut être reconduite à des vérités logiques. La seule difference entre les vérités concerne le fait que la réduction des vérités contingentes demande une analyse infinie. Ceci va de pair avec la recherche d'un langage adequat pour la formulation d'une preuve effective (calculatoire) de toute vérité. Tout le probleme consiste dans la mise en place d'un tel calcul. Or de ce point de vue, comme on l'a également vu, Leibniz est essentiellement reste tributaire d'une analyse prédicative des propositions.

Frege, par son Idéographie, va permettre une analyse radicalement nouvelle du « contenu conceptuel » des propositions. Le pas essentiel consiste à introduire la quantification dans la logique des relations, et ainsi a s'émanciper du syllogisme comme forme de tout raisonnement. Frege propose au contraire désormais d'analyser toute proposition en un concept et un objet, ce qui permet de prendre l'application d'une fonction à un argument comme modèle de découpage des propositions ordinaires. Frege va réussir ainsi à definir les nombres et à démontrer le principe de recurrence par des moyens purement logiques (précisément parce que la logique mise en œuvre est pré-calquée sur le modèle de l'arithmétique – cf. sous-titre de l'Idéographie). Ce qu'il est important de remarquer est que l'ambition de Frege est d'abord épistémologique : il s'agit de garantir la certitude *a priori* de l'arithmétique, en la reconduisant « aux lois sur lesquelles toute connaissance repose », et d'éradiquer en même temps tout psychologisme dans les notions de vérité et de preuve. L'expression de « lois de la pensee » est à cet égard ambiguë chez Frege, car il ne s'agit pas de faire intervenir les règles d'inférence que de fait nous ne pouvons pas nous empêcher d'employer, mais les règles qui assurent la transmission du vrai et que nous devons donc respecter dès lors que notre discours prétend à la vérité. Comme Frege le dit au debut des Gg, les lois logique « ne méritent proprement l'appellation de 'lois de la pensee' que si par là on entend que ce sont les lois les plus générales, qui prescrivent universellement comment on doit penser si l'on veut penser tout court ».

Russell. Introduction des PoM : toutes les mathématiques pures s'occupent exclusivement de concepts définissables au moyen d'un très petit nombre de concepts logiques fondamentaux, et [...] toutes leurs propositions sont déductibles d'un très petit nombre de principes logiques fondamentaux. Deux sources de difficultés : tout d'abord, la détermination précise de ces notions et principes fondamentaux. En particulier, les notions fondamentales sont interdéfinissables, et c'est tout un travail de vérifier qu'elles sont bien mutuellement réductibles les unes aux autres. Ensuite, l'existence de paradoxes exige d'incorporer aux principes logiques les moyens de barrer la formation de ces paradoxes. Paradoxe de Burali-Forti (1897) : l'ensemble de tous les ordinaux est bien ordonné, donc admet un ordinal ; cet ordinal doit faire partie de l'ensemble de tous les ordinaux, et être en meme temps strictement superieur à tout ordinal de cet ensemble. Paradoxe de Russell extensionnel : l'ensemble de tous les ensembles ne s'appartenant pas à eux-mêmes. Paradoxe de Russell intensionnel : le prédicat « hétérologique ». C'est à la fois l'arithmétique, la théorie des ensembles et la logique qui sont touchées. La source du paradoxe est que selon Frege une expression comme $f(a)$ peut etre considérée aussi bien comme une fonction de f que comme une fonction de a.

Solution de la théorie des types. TST : individus, ensembles d'individus, ensembles d'ensembles d'individus, etc. : $a_n \in b_m$ n'est autorisé qu'à la condition que $m > n$. TTR : on ajoute la condition qu'aucune proposition ou fonction propositionnelle ne peut contenir un quantificateur qu'à la condition que celui-ci parcourt les propositions ou fonctions propositionnelles d'un ordre inférieur à celui de la proposition ou fonction propositionnelle concernée. Idée de propositions ou fonctions propositionnelles de complexité logique croissante. Propositions atomiques et fonctions construites sur ces fonctions (niveau 0), propositions et fonctions impliquant un quantificateur parcourant les éléments de niveau 0, mais pas plus, propositions et fonctions parcourant les elements de niveau ≤ 1, et ainsi de suite. La stratification des ensembles découle de celle des fonctions propositionnelles (un ensemble a pour niveau celui de la fonction propositionnelle de niveau minima dont il est l'extension, donc la TST est un sous-produit de la TTR. L'idée sous-jacente à la théorie des types est le *principe du cercle vicieux* : « Whatever involves *all* of a collection must not be one of the collection » (ML, LK, p. 63).

Principia

Réductionnisme ontologique : Les nombres sont reconduits aux classes (« cardinal number of a given collection = class of all equally numerous collections »), et les classes sont des fictions logiques (*20.01 : $f(\widehat{z}(\psi z)) := \exists\phi\ (\phi x \equiv_x \psi x \wedge f(\phi))$) : elles n'ajoutent rien à l'« ameublement » ultime du monde. Plus exactement, ce sont des *constructions logiques*. Dans les PM, en effet, seules certaines définitions introduisent des symboles qui ont les « propriétés formelles des noms » : si on peut appliquer « la théorie de la variable apparente » à des symboles inomplets, c'est-à-dire si on peut leur appliquer les règles quantificationnelles exposées dans les chapitres 9-11 des PM, ainsi que la théorie de l'identité qui découle de ces règles et qui est exposée au chapitre 13, alors ces symboles incomplets ont les propriétés formelles des noms. Russell utilise notamment souvent les deux théorèmes *9.2 ($\forall x \psi x \rightarrow \psi y$) et *13.15 ($x = x$) pour distinguer les quasi-noms des autres expressions incomplètes. Les symboles de classes vérifient ces deux schémas. C'est en cela qu'elles constituent des constructions, et pas seulement des fictions. Elles peuvent ainsi etre considérées comme de véritables objets, mais sans poser le probleme du statut ontologique des objets mathématiques.

Reductionnisme épistémique : Le projet logiciste est souvent considéré comme visant à montrer que la connaissance mathématique est aussi sûre que la connaissance logique, que la justification de la croyance dans les vérités mathématiques peut être ramenée à la justification des principes évidents de la logique. Cette perspective n'est pas du tout celle de Russell, qui remarque notamment qu'une vérité arithmétique comme $2 + 2 = 4$ est beaucoup plus évidente que sa reconstruction logique (cf. « The Regressive Method of Discovering the Premisses of Mathematics », EA, p. 272). Bien souvent, le but d'une preuve n'est pas de prouver la conclusion, mais de montrer que la conclusion s'ensuit de telles et telles prémisses. Une prémisse logique est une proposition logiquement plus simple (cad une proposition comportant un plus petit nombre de constituants logiques) à partir de laquelle telle ou telle proposition peut etre déduite. Une proposition logiquement plus simple n'est pas nécessairement plus évidente. Étant donné notre participation au monde physique, ce sont en général les vérités de complexité moyenne qui sont les plus facilement admises. C'est pourquoi les prémisses logiques sont en fait justifiées par leurs conséquences, plutôt que l'inverse. Telle est ce que Russell appelle la « méthode régressive » : si d'un petit groupe de prémisses peuvent être déduites de manière valide un grand nombre de conclusions considérées comme des vérités évidentes, la déduction en question permet de justifier, non pas les conclusions à partir des prémisses, mais, inductivement, les prémisses à partir des conclusions (RMDPM, EA, p. 273). Les mathématiques ont donc pour Russell le même fonctionnement méthodologique que n'importe quelle autre science (expérimentale). Idée propre à Russell que la logique (et les mathématiques) sont une science exactement comme n'importe quelle autre. Elle n'a pas de position de surplomb. Mais quels sont ses objets ? Réponse : les formes propositionnelles.

5.3.1 [Griffin, 1980]

As everyone knows, Russell was a logicist : that is, he believed that mathematics could be reduced to logic. Quite what he meant by this, however, is another matter. Russell was not very explicit about what he meant by 'logic'. In Part I of the Principles, there is much discussion about whether this or that concept be taken as indefinable, or whether this or that proposition b taken as indemonstrable. What is missing is not an account of the logical primitives, but an account of why the logical primitives are *logical* primitives ; of what conditions a constant or a proposition has to satisfy if it is to count as a *logical* constant or a proposition of *logic*. So : problem of the demarcation of logic. (« What is logic » : unpublished and unfinished manuscript of October 1912.) Some commentators gather from it that the problem never occured to Russell.

Griffin : this view is plainly false. 1) Russell was concerned with the development of a new logic to which mathematics could be reduced, so he could hardly be unaware of questions concerning the logical status of the new foundations. Example of the axiom of infinity. 2) Russell did not see logicism as a means of securing mathematics by reducing th number of unprovn assumptions required by mathematics.

Around 1903, Russell thought that logicism would demonstrate the *necessity* of the propositions of mathematics, by showing that they could be derived from logical axioms which were necessary. Around 1908-1913 he thought that logicism would demonstrate the *certainty* of the propositions of mathematics, by showing that they could be derived from logical axioms which were certain. These are the two Russellian logicisms. The shift from the first to the second one is occasioned by the adoption of the theory of types.

PoM, p. 528 : the paradox « affects th very foundations of reasoning ». The natural or intuitive of logic which Russell had previously has become untenable. It is for this reason that the solution of the paradoxes was such an obsession for Russell : no simple monster-barring device would be sufficient to provide an adequate solution, the theory of logic itself has to be changed. About type theory, Russell thought it possible to reconstruct an alternative view of logic along the lines of type theory, but this time appealing to epistemology, outside logic, to show the truth of the propositions of logic. The inadequacy of this view was pointed out by Wittgenstein.

The central task of the new philosophy advocated by Russell and Moore in reaction to Idealism (cf. Hylton) was the analysis of propositions. In particular, Russell wants to defend the objectivity of relations against the subject-predicate theory, whcih claims either that apparently relational propositions are not genuinly relational, or that they are merely mental phenomena. According to Russell (in th PoM), propositions are objective, non-mental entities, and the question whether propositions contain relations settles the question of the reality of relations (hence the philosophical importance of the discussion of the subject-predicate view of propositions in *Leibniz*). Whatever can be mentioned, whether actual or not, is a *term*, provided that it can be counted as one. All terms have *being* : *existence* in the case of actual terms, and *subsistence* in the case of the others. Terms are of two sorts : *things* and *concepts* (PoM, ch IV). Things may be combined with concepts or concepts with concepts to form *complex* terms. Things can also be combined with things, but the result in that case is not a term, but an *object* : objects, unlike terms, need not be single. The objects which result from the combination of things are classes-as-many and the denotations of certain denoting concepts (ch V and VI). Any complex term is a *proposition*. Thus *the green grass* as well as *the grass is green* is a proposition. Now every term A, whether simple or complex, can occur *only* in a proposition, at least in the proposition A *is*. Thus, e.g., perception is propositional : to see Mary is to see the proposition *Mary exists*. (Cf. G.E. Moore, « The nature of judgment », *Mind*, 1899, and Alexius Meinong, *Uber Annahmen*, 1902.)

Although it is not a primitive predicate of propositions, any propositions for Russell is true or false. But since propositions are themselves subsistent terms, there is nothing for them to correspond to. So Russell adapted from Moore what may be called an og intuitional theory of truth », according to which truth and falsity are themselves concepts which belong to complex terms, rather in the way, as Russell puts it (cf. « Meinongs theory of complexes and assumptions », 1904, in EA p. 75-76, and PoM, p. 48) that some roses are red and some others are white. This holds equally for *the green grass* and for *the grass is green* ; the difference lies in the fact that the asserted proposition has an intrnal relation to its truth value, whereas the propositional subject (nominalized proposition) has an external relation to its truth value, which is rlated to the fact that it lacks any assertional modality (cf PoM, §48-49).

The second feature of propositions is their structure. Any proposition contains at least one concept (otherwise it is a complex of things, hence an object). In every proposition one and only on concept is responsible for the unity of the proposition, this is the *verb* or *relation* (*relating relation* in the case of a genuine, non-nominalized proposition). A relation may occur in a proposition in such a way that it is not responsible for the propositions's unity (ex : to the left of *is a relation*). Apart from the relating relation, all the *constituents* of a proposition occur as *the terms of the proposition* : they are the *subjects* of the proposition, that is what the proposition *is about*. (Russell - cf. PoM, p 34n - treats the copula as a pseudo-relation, since the proposition is not about the relatum.)

A propositional function is obtained from a proposition when one or more of the subjects of the proposition are replaced by a variable. Or rather, a proposition is obtained from a propositional function when a term is substituted for the variable in a propositional function. So if $\phi(x)$ is a propositional function then, for every term a as argument (being substituted for the variable x), $\phi(a)$ is a proposition (PoM, p. 19-20, 34, 36-38). So any proposition may result from different propositional functions (typically, to aRb correspond $\widehat{x}Rb$, $aR\widehat{x}$ and $\widehat{x}R\widehat{y}$). Moreover, Russell does not impose any type restrictions : *to the left of is a man* is a proposition as well as *Socrates is a man*. Since Russell's logic is two-valued (the lack of truth value is no option), most propositions are going to be false. But propositional functions are going to yield true propositions for every argument ($\phi(x) \vee \neg\phi(x)$, x *is a term*) : they are said to be *necessary* (cf. « Necessity and Possibility », ms of 1904) : « The propositional function 'x has the property Φ' is *necessary* if it holds of everything ; it is *necessary throughout the class* u if it holds of every member of u[16]. » But propositional functions themselves are neither true nor false : they can only be *true of* an argument. So necessity does not mean being necessarily true. Russell tries to mend this shortcoming by adding : « It is possible to regard a proposition as *necessary* when it is an *instance* of a type of proposition all of which are true. » The two definitions fit together because Russell identifies a propositoinal function as a class of propositions of the same form (PoM, p. 92-93). So it could be said that a proposition is necessary for Russell if it is the value

[16][Russell, 1992a], p. 517-518.

of a necessary propositional function.

Are propositions of logic necessary ? The PoM opens with the claim : « Pure mathematics is the class of all propositions of the form 'p implies q', where p and q are propositions containing one or more variables, the same in the two propositions, and neither p nor q contains any constants except logical constants. » This account of the propositions of pure mathematics covers the propositions of logic as well (cf. §10). The motivation for the condiationalized form is provided by the constraint that propositions of logic have to meet : they must be universally true, without any type distinction. Now consider a tautology such as $p \supset (p\&p)$ (1). On Russell's 1903 theory, (1) is a not a proposition but a propositional function. It is a true proposition for each proposition replacing p. But since the variable is absolutely unrestricted, both propositional and non-propositional variables may be substituted to p, so that Socrates $\supset$ (Socrates$\&$ Socrates) (2) is a legitimate value of (1). (2) is a proposition, and it can be true, so it is a false proposition, which means that (1) is not necessary after all. Any type distinction would have been a very serious blow to Russell, it was not an acceptable way out. In 1903, Russell solved the problem by conditionalization, replacing (1) with $p \supset p \supset .(p\&p)$ (3), where '$p \supset p$'expresses « p is a proposition », since only propositions imply each other. So in (3) now, non-propositional arguments make the antecedent false, and so (3) keeps true by failure of antecedent, even if the variables range absolutely unrestrictedly (as it ought to be within propositions of logic).

5.3.2 Concepts dénotants

RIVENC

5.4 Tractatus

Critique + Conant

6 Logique et grammaire

Il n'existe pas de pensée qui existe indépendamment de sa formulation possible – d'où un lien intrinsèque entre la grammaire et logique. Mais d'un autre côté, la logique est également chargée de ressaisir les articulations de la pensée sous le revêtement superficiel de la grammaire. La logique tire tout d'abord sa légitimité de la pluralité des langages. La grammaire exprime un usage là où la logique vise des rapports (entre concepts ou entre propositions) dont la validité ne dépend d'aucun langage particulier. Mais précisément en s'autonomisant par rapport à l'usage, c'est-à-dire par rapport à l'emploi du langage dans des contextes pratiques variés (pour lesquels le langage ordinaire s'avère justement parfaitement adapté) et en se tournant vers une pensée formelle (dont les mathématiques peuvent fournir le gage), la logique s'attache à un langage très particulier. Le formalisme logico-mathématique devient un cadre discursif parmi d'autres, et la logique l'analyse d'un langage parmi d'autres – ce qui contredit sa prétention à dominer par des règles de droit l'ensemble de tous les langages.

6.1 Le parallélisme logico-grammatical

C'est un lieu commun de dénoncer les dangers du langage, mais pour autant « c'est un préjugé de supposer sans preuves que le schème grammatical est la reproduction fidèle d'un schème de la pensée. » ([Serrus, 1933], p. 5) Depuis Aristote, la coïncidence de la logique et de la grammaire est postulée (cf. logique de Port-Royal, encyclopédistes, idéologues) : la légalité du discours semblait commandée par des exigences de la pensée. « Il y a, dans cette supposition d'une valeur logique des formes de discours, l'affirmation d'une grammaire générale, c'est-à-dire d'un invariant universel des langues du monde. On la fonde sur la croyance en une identité de structure de l'esprit humain. » (*op. cit.*, p. 6)

L'idée de Serrus consiste à transposer au rapport entre la pensée et l'intuition le schématisme qui chez Kant a pour fonction d'assurer la mise en rapport des concepts purs et de l'intuition :

> Kant semble avoir admis une adéquation *normale* de la pensée et du discours et même une valeur logique des formes grammaticales [...]. On sait que Kant décrit un schème dans lequel se fait, au moyen de la fonction du jugement, la rencontre de l'intuition et du concept. Il a omis, dans ce schème, le rapport séméiologique de la pensée et de son expression.
>
> [...]
>
> Il faut tenir compte de l'*intention de signification*, c'est-à-dire à la fois de la volonté d'expression et de l'orientation du discours vers un sens. [...] Mais comme une pensée n'est concrètement saisissable qu'en tant qu'elle s'exprime, comme on peut être tenté de la chercher dans le langage, et en particulier dans la grammaire, il n'y a qu'un moyen de sauver la logique du nominalisme [c'est-à-dire l'élimination des idées, reconduites aux mots], c'est de recourir à l'*intention de signification*.
>
> [...]
>
> On entrevoit dès lors de nouveaux rapports possibles de la grammaire et de la théorie de la connaissance. Peut-être celle-là s'incorpore-t-elle à celle-ci non pas indirectement, mais directement, comme un rapport sans lequel la pensée ne sera plus concevable. Le schème pourra la comprendre, au même titre que l'intuition et que la fonction du jugement. Le fait logique sera emprisonné à la fois dans un fait de représentation et dans un fait de langage. [...] Mais il faut supposer pour cela une union intime de l'image verbale et de l'idée, de la forme grammaticale et de la forme logique ; il les faut hétérogènes, mais liées [...] [17].

Ce développement de Serrus renvoie explicitement, à travers l'expression d'« intention de signification », à lœuvre de Husserl, et en particulier à [Husserl, 1984], qui conçoit d'abord la logique formelle comme « analytique apophantique[18] », mais qui ajoute : « Cependant on n'a qu'à se rappeler que la pleine signification de juger c'est porter des jugements sur des *objets*, énoncer des *propriétés* ou des *déterminations relatives* de ces objets », d'où une solidarité « in re » de l'apophantique formelle avec une ontologie formelle, c'est-à-dire avec la théorie dont le domaine est *objet en général* (avec une généralité formelle qui laisse hors de considération toute détermination concrète d'objets). « Finalement, *toutes les formes d'objets*, toutes les variantes du quelque chose en général interviennent *dans l'apophantique formelle elle-même* [...][19] ».

6.2

Serrus : « On veut prouver que l'incorporation de la pensée au langage est totale [...] : la pensée ne pourrait être prise que comme le *sens* d'un discours [...], du moins comme le sens idéal et commun de plusieurs textes possibles, voire d'une infinité de systèmes d'expressions formulées dans toutes les langues du monde. » (*op. cit.*, p. 10-11) Il faut par exemple voir en l'aphasie, non pas une défaillance physique, mais une perte de la fonction de signification dans ce qu'elle a d'intellectuel.

[17] *Op. cit.*, p. 8-10.

[18] Cette analytique inclut une morphologie pure des jugements (par exemple, à la forme S *est* p est subordonnée la forme Sp *est* q, etc.) (§13), une logique de la conséquence ou science des formes possibles des jugements vrais (§14) et une analytique pure comme fondement de la logique formelle de la vérité (faisant de la non-contradiction la condition de toute vérité possible) (§19).

[19] [Husserl, 1984], §25.

> Qu'est-ce que réaliser le sens d'une expression ou d'un signe ? Sans doute, c'est penser l'idée qui leur correspond [...]. Mais cette réponse n'est pas satisfaisante, puisqu'il s'agit précisément de savoir d'abord sous quelle forme l'idée se présente à la conscience.
>
> [...]
>
> Le langage suppose la volonté d'utiliser les symboles en vue de l'évocation [d'idées]. [...] *Il y a donc une intention de signification qui n'est pas direction vers une pensée, mais seulement vers une forme de langage.* Elle est tendance d'une pensée à se créer ou à se choisir des procédés d'expression [...] il n'y a pas une vertu de la signification d'où sortirait la pensée ; il ne faut pas concevoir le langage comme une *faculté* qu'il suffirait de poser pour résoudre tous les problèmes de séméiologie. [...] il fut chercher l'effectuation du rapport séméiologique dans la création de l'expression [...], non dans celle du sens. [...]. En somme, M. Husserl prétendait déplacer les problèmes de l'adéquation, de l'évidence et de la vérité pour en faire l'adéquation, l'évidence et la vérité du sens de nos paroles. Mais cela ne se peut que si l'on fait de la signification une faculté, et si l'on accroît les difficultés du kantisme, en faisant intervenir dans la connaissance une forme *a priori* de la signification[20].

On peut prolonger cette analyse en se référant à un article célèbre de Émile Benvéniste intitulé « Catégories de pensée, catégories de langue ». Dans cet article, Benvéniste étudie les catégories d'Aristote, et montre qu'elles correspondent chacune à une caractéristique grammaticale de la langue grecque. Cette coïncidence ne laisse guère place au doute : Aristote n'aurait fait qu'absolutiser en catégories logiques une organisation grammaticale particulière à sa propre langue, et qui de ce fait ne lui apparaît pas comme telle. « nous ne saisissons la pensée que déjà appropriée aux cadres de la langue[21]

> Il nous paraît que ces prédicats [les dix catégories aristotéliciennes] correspondent non point à des attributs découverts dans les choses, mais à une classification émanant de la langue même. Il [Aristote] pensait définir les attributs et les objets ; il ne pose que des êtres linguistiques : c'est la langue qui, grâce à ses propres catégories, permet de les reconnaître et de les spécifier. [...] La langue fournit la configuration fondamentale des propriétés reconnues par l'esprit aux choses. Cette table des prédicats nous renseigne donc avant tout sur la table des classes d'une langue particulière[22].

Une figure symétrique de l'absolutisation logique consiste dans le projet de grammaire générale. Dans la mesure en effet où il n'existe qu'un nombre fini de langues (mortes ou vivantes), il est idéalement possible de dégager les invariants grammaticaux propres à toutes les langues, ou du moins à certains grands groupes de langues. On aboutit ainsi à une logique empirique, d'essence linguistique, et qui n'est que le pôle opposé de la volonté de reconduire la grammaire à la logique. La grammaticalisation de la logique comme la logicisation d'une grammaire particulière procèdent du même postulat, selon lequel on parle comme on pense, et réciproquement.

6.3 Critique du parallélisme logico-grammatical

Frege, dans la Préface de l'*Idéographie*, critique toute subordination de l'analyse logique aux contingences pragmatiques des expressions linguistiques. Par son Idéographie, Frege entend dégager un langage apte à l'expression précise et explicite des rapports logiques, dans la sphère de

[20] *Op. cit.*, p. 34-37
[21] [Benvéniste, 1966], p. 64.
[22] *Op. cit.*, p. 70.

la « pensée pure ». On peut voir dans l'Idéographie frégéenne, et dans la logique moderne en général, l'autonomisation discursive progressive des mathématiques – car c'est d'abord les liens déductifs entre jugements mathématiques que Frege a en vue lorsqu'il parle de pensée pure. Frege insiste cependant sur la recherche d'une langue (*Sprache*) vouée à l'expression des relations logiques entre jugements en général : l'Idéographie ne se réduit certainement pas dans son esprit à un système « formel » mais constitue au contraire un langage qui, pour être muni d'une syntaxe explicite (garante de son exactitude), sert bien l'expression d'un *contenu* (à savoir les liens entre concepts et contenus de jugement sur lesquels repose une preuve). Le projet frégéen se trouve dès lors suspendu à la mise en place d'un langage apte à exprimer tout ce qui relève de la pensée théorique en général. Le paradoxe (dit de Russell) auquel le système de Frege prête le flanc peut être considéré comme le signe que le système de Frege, visant à la représentation non seulement de la pensée mathématique mais de la pensée en général, est incapable de satisfaire cette ambition. Il faut alors se résoudre à une pluralité de langages, à commencer par la distinction entre le langage ordinaire (ou plutôt tous les cas de figure et toutes les ramifications du langage ordinaire) et le langage mathématique. Dans cette perspective, la logique est à chaque fois la logique d'un certain langage (au mieux d'un certain type de langage), autrement dit une grammaire. On en revient donc à l'impossibilité de séparer logique et grammaire sans identifier la logique à une super-grammaire dégénérant en grammaire parmi d'autres. Une solution consiste à prendre acte de cette inséparabilité, pour comprendre la logique comme une grammaire élargie. L'idée est qu'au fond on ne sait pas très bien cerner la portée ou le contenu de la logique, alors que la grammaire d'un langage est quelque chose d'assez clair, et par conséquent qu'on ne peut se représenter et essayer de développer la logique que par extension à partir de l'idée de grammaire. Il existe deux voies pour cela : ou bien construire la logique sur le modèle d'une grammaire (et plus particulièrement de la grammaire très particulière mise au point à propos des mathématiques), ou bien à comprendre que la grammaire (la grammaire très particulière que constitue la description philosophique de la façon spécifique dont fonctionne un langage) est déjà exactement ce qu'on a toujours recherché en parlant de logique.

6.4 La logique comme syntaxe (Carnap), la grammaire comme logique (Wittgenstein)

Identifiant la philosophie à la construction d'une syntaxe logique générale, Carnap distingue entre l'« idiome matériel » et l'« idiome formel ». : le premier correspond au langage-objet, et le second au métalangage. Carnap propose de classer tous les énoncés bien formés du langage dans l'une des trois catégories suivantes : (a) « phrase d'objet », (b)« pseudo-phrase d'objet » et (c) « phrase syntaxique ». Exemple : (a) *Cette rose est rouge* : c'est un énoncé qui attribue une propriété extralinguistique à une entité extralinguistique ; (c) *Le mot « rose » est un mot de chose* ; (b) *Cette rose est une chose* : c'est la phrase syntaxique qui précède, mais maladroitement formulée sous la forme d'une phrase d'objet. Les énoncés métaphysiques sont tous selon Carnap reconductibles à de telles pseudo-phrases d'objet, quand elles ne sont pas tout simplement des psudo-phrases tout court, contrevenant aux règles formelles du langage (comme par exemple la théorie des types dans le cas de « César est un nombre premier »). L'idée sous-jacente est que les controverses métaphysiques à propos de la réalité ultime des objets empiriques ou mathématiques pourraient apparaître, du point de vue de la syntaxe logique, non pas comme un conflit entre des thèses portant sur des entités extralinguistiques, mais comme un conflit entre des choix différents de cadre linguistique.

Carnap reprend ici à son compte la méthode métamathématique qui chez Hilbert complète la méthode axiomatique en se proposant d'étudier les propriétés « métalogiques » d'un système d'axiomes donné. (Un système d'axiomes devient ainsi en lui-même un objet d'étude à part entière. Il faut dès lors distinguer les objets virtuellement décrits par un système d'axiomes (par exemple les droites et les points si le système d'axiomes considéré est celui de la géométrie plane), et l'objet logique que constitue le système lui-même. D'où l'existence de deux niveaux, et d'où l'expression « méta- ».). La méthode de Hilbert consiste en une théorie purement syntaxique, énonçant uniquement des règles de concaténation de symboles (règles de formation à partir d'un alphabet de base) et des règles de passage de concaténations données de symbole à une autre (règles de transformation ou d'inférence). Le projet de Carnap consiste tout d'abord (dans la *Syntaxe logique du langage*[23]) à « montrer que les concepts de la théorie de la logique formelle déductive comme la prouvabilité, la dérivabilité à partir de prémisses déterminées, l'indépendance logique, etc., sont purement syntaxiques, et qu'on peut donc formuler leurs définitions dans la syntaxe logique, puisque leurs concepts ne dépendent que de la forme des phrases, et pas de leurs significations[24] », et son erreur consiste ensuite à supposer que cette métathéorie (à l'origine faite pour l'étude des systèmes d'axiomes mathématiques) pouvait également servir de théorie générale de tous les cadres linguistiques possibles, c'est-à-dire de théorie générale de la signification pour tous les énoncés de tout langage possible.

Plutôt que la voie de Carnap, une voie symétrique est donc peut-être préférable : celle de Wittgenstein, qui conçoit inversement la grammaire comme logique. L'idée fondamentale de Wittgenstein (développée entre autres dans [Wittgenstein, 1975] et [Wittgenstein, 1978]) est qu'un langage constitue une activité régie par des règles. La *grammaire* d'un langage est le système d'ensemble des règles déterminant *ce qu'il fait sens ou non de dire* dans ce langage[25]. L'un des paradigmes auquel recourt Wittgenstein est le jeu d'échecs : certains coups sont permis (font sens), d'autres non. Non pas que les règles soient absolument contraignantes : on peut tout à fait les contourner, mais on cesse dans ce cas de jouer à ce que la communauté linguistique et pratique que nous formons appelle « jouer aux échecs ». Les règles des échecs sont explicites sans être séparables d'une pratique du jeu (comprendre ces règles, c'est savoir les appliquer), et suffisantes pour régir toutes les parties possibles sans pour autant être exhaustives (les règles du jeu d'échec n'interdisent pas de déplacer les pièces en les élevant à une hauteur de 3 mètres, et pourtant procéder ainsi rendrait le jeu impraticable, ou le transformerait en un exercice sportif en plus d'une partie d'échecs). Comme le dit Wittgenstein dans la *Grammaire philosphique* :

> La grammaire n'a à rendre compte d'aucune réalité. Ce sont les règles grammaticales qui détermine la signification (la constituent) et par conséquent n'ont de compte à rendre à aucune signification, et dans cette mesure sont arbitraires. On ne saurait poser la question de savoir si telles ou telles règles sont les règles correctes de l'emploi de 'ne ... pas' (c'est-à-dire si elles concordent avec sa signification). Car sans ces règles cette expression n'a encore aucune signification [...].
>
> On ne saurait justifier les règles de grammaire en montrant que leur application rend une représentation conforme avec la réalité. Car cette justification devrait elle-même décrire ce qui est représenté. Et si quelque chose peut être dit pour cette justification et est autorisé par sa grammaire – alors pourquoi ce quelque chose ne pourrait-il pas être également autorisé justement par la grammaire que je suis en train d'essayer de justifier[26] ?

L'illusion que dénonce Wittgenstein est celle qu'il dénomme la croyance à un « corps de signification » (*Bedeutungskörper*), qui serait le noyau de signification déterminant tous les emplois possibles d'un mot ou d'une expression, et que les règles grammaticales seraient censer ressaisir. La croyance en un corps de signification n'est que l'expression de la croyance en un corps de règles, autrement dit à la mythification de règles du langage en règles logiques intangibles et objectives, valant par elles-mêmes. Wittgenstein insiste au contraire sur le fait que les règles de grammaire d'une expression particulière engagent toujours les règles d'usage d'un langage

[23] [Carnap, 1934].
[24] [Carnap, 1963], p. 54.
[25] [Wittgenstein, 1975], §51 ; [Wittgenstein, 1978], §§60, 133, 143.
[26] [Wittgenstein, 1978], Partie I, X, §133, p. 184 et §134, p. 186.

dans son ensemble, et que ces règles sont adhérentes à une pratique discursive indissociable d'un ensemble de conventions implicites, d'activités à plusieurs, d'un sens commun propre à notre communauté – ce qui signifie qu'il ne saurait être question de dégager ces règles pour les expliciter en tant que telles. Elles ne spécifient aucune signification idéale, mais ne font qu'articuler une activité, que ce soit un calcul mathématique ou une partie d'échecs, et sont en cela immanentes à leurs exemplifications explicites[27]. En cela, c'est à l'idée de logique qu'il convient de renoncer, dans la mesure où elle est vouée à alimenter l'illusion de la possibilité d'une grammaire pure. « L'arithmétique est la grammaire des nombres[28] », « La géométrie de l'espace visuel est la syntaxe des propositions qui traitent des objets dans l'espace visuel[29] : il n'est plus question de logique, même à propos des mathématiques. Wittgenstein prend acte du fait que les règles logiques du calcul et de la démonstration mathématiques sont des règles grammaticales parmi d'autres. L'illusion de Carnap – celle que toutes les grammaires ont encore un noyau commun, qu'on peut toutes les décrire uniformément, bref qu'il existe une logique de la grammaire – est mise à distance, mais au prix de l'idée même de logique.

7 Logique et mathématiques

La mathématique est à la fois la pensée par excellence et un moyen de représentation et d'analyse de la pensée. (Cette ambivalence commence dès Aristote, mais existe clairement depuis Leibniz.) Dans les deux cas, l'enjeu pour la logique est de se constituer comme une discipline autonome face aux mathématiques. Mais la constitution de la logique en science spécifique est en même temps le meilleur moyen pour la logique d'apparaître comme une dépendance des mathématiques.

7.1 Le primat de la logique et le logicisme

Cf. [Rivenc, 1993] à propos de l'idée classique de logique philosophique (chez Kant et Husserl notamment) comme science premère et « théorie des théories ».

Idée propre à Gottlob Frege (cf. introduction des [Frege, 1969] et préface de [Frege, 1999]) selon laquelle la logique se distingue par son absolue généralité : la logique énonce les lois de l'être vrai à l'échelle de tout ce qui est en général. Idée complémentaire selon laquelle les vérités logiques jouissent d'une validité très particulière (que Frege appelle « analyticité »), dans la mesure où elle sont dérivables de principes généraux. Les principes logiques eux-mêmes sont fondés sur le fait qu'on ne peut que les présupposer. Par ces deux traits, la logique possède une radicalité qui la démarque des mathématiques.

Pour autant, le projet de Frege est précisément de montrer que certaines parties des mathématiques (essentiellement l'arithmétique) sont en réalité de nature logique. Le logicisme consiste à montrer que certains concepts mathématiques sont définissables en termes purement logiques et que les théorèmes relatifs à ces concepts sont dérivables logiquement de principes logiques (et de définitions). Le logicisme de Frege vise en particulier à justifier la portée absolument générale de l'arithmétique. Selon Frege, le concept de nombre et les vérités arithmétiques sont « coextensives » au domaine du pensable lui-même. L'opération logiciste est par conséquent ambiguë, car elle repose sur l'affirmation de la primauté théorique de la logique sur les mathématiques, pour précisément reconduire une partie substantielle des mathématiques à la logique. D'où la constitution d'une sphère « logico-mathématique » indistincte, chez les tenants du conventionnalisme notamment : la logique comme les mathématiques découleraient

[27] Cf. [Wittgenstein, 1975], §180.
[28] *Op. cit.*, §108.
[29] *Op. cit.*, §178.

de conventions régissant un système de langage, ces conventions étant la vérité à la fois des principes logiques et des axiomes mathématiques.

7.2 Absorption de la logique par les mathématiques

La question du rapport entre logique et mathématiques est en réalité sous-déterminée par le problème des fondements des mathématiques, né au début du XXᵉ siècle à la suite de la découverte de paradoxes, et plus généralement par toutes les étapes de crise, positive ou négative, qui ponctuent l'histoire des mathématiques. Dans cette perspective, la logique moderne est née de l'axiomatisation des mathématiques et du projet propre à Hilbert d'analyse « métamathématique » des systèmes axiomatiques (dans le but d'établir leur non-contradiction, c'est-à-dire leur invulnérabilité à un quelconque paradoxe).

Le destin ultérieur de la logique fut de devenir une branche des mathématiques parmi d'autres. Ayant incorporé toujours davantage d'instruments mathématiques d'analyse des théories formelles, la logique a commencé par adopter une position de surplomb, d'instrument transversal d'étude des théories mathématiques en général, pour devenir une théorie mathématique particulière ayant pour objet les systèmes d'axiomes en général, c'est-à-dire les théories mathématiques en tant que formelles, mais non le contenu de ces théories (c'est pourquoi elle ne se situe pas « au-dessus » de ces dernières). La logique conçue comme analyse métamathématique est naturellement devenue logique mathématique. La volonté de distinguer la logique des mathématiques tient à l'absolutisation de la logique hors de toute histoire.

7.3 La pensée mathématique

On peut conserver de la première partie l'idée d'une prééminence de la logique, et de la deuxième le souci de tirer les leçons de l'histoire (les mathématiques comme la logique sont des disciplines instituées, et à ce titre des sciences historiques). À cet égard, il convient d'introduire un tierce discipline, à savoir la philosophie. On pourrait dire que les mathématiques pensent, mais que seule la logique les interprète comme pensant quelque chose. La logique est vouée aux mathématiques, elle se définit essentiellement en référence à elles. Elle est la pensée des mathématiques comme pensée, elle est ce qui assure aux mathématiques de constituer une pensée. Les mathématiques sont en cela philosophiquement (non mathématiquement) subordonnées à la logique, et en retour la logique est ce que le développement des mathématiques suscite au sein de la philosophie pour permettre de ressaisir les mathématiques dans le domaine de la pensée en général. Cette circulation, faisant de la logique le lieu des échanges entre mathématiques et philosophie, est ancrée dans l'histoire, et il n'est pas étonnant que ses principales illustrations se trouvent chez des philosophes du début du XXᵉ siècle particulièrement confrontés à la divergence croissante entre le registre discursif propre au langage ordinaire et le registre discursif propre aux mathématiques modernes : Edmund Husserl et Bertrand Russell.

7.3.1 Husserl

Husserl[30] conçoit la logique comme une analytique indissociablement apophantique et ontologico-formelle. Ces deux aspects de la logique correspondent respectivement à deux possibilités d'orientation : soit vers les jugements en génral, soit vers l'objectivité en général. Ce qui est caractéristique de la logique est selon Husserl le « changement d'orientation qui fait passer des propositions aux objets » ([Husserl, 1984], §37). Dans l'analytique formelle l'objet est « conçu purement comme objet de jugements possibles, comme objet des formes de jugemets qui lui sont attribuées par l'analytique ». C'est encore le cas pour les mathématiques comprises (avec

[30] Lire la section que Tran Duc Thao consacre au rapport entre logique et mathématique chez Husserl : [Thao, 1992], §19 : « La constitution du domaine formel : logique et mathématiques ».

l'émergence de la théorie des ensembles contemporaine de Husserl) comme *mathesis universalis*, et à ce titre comme « ontologico-formelle » (cf. §39). Cependant :

> Dès qu'est pris en considération l'intérêt de connaissance, toute espèce d'activité doxique est pensée comme incluse nécessairement dans les activités qui sont liées *prédicativement*. [...] on collige et on compte donc finalement pour connaître et *déterminer prédicativement* (d'une manière apophantique) les éléments et les unités en question, et cela en tant qu'ils appartiennent au domaine considéré. *C'est pourquoi dans la logique* qui certes a en vue exclusivement des intérêts de connaissance, les intérêts de connaissance de la science, *il n'est jamais question que de jugements prédicatifs* [...]. Une mathématique s'élaborant à la manière d'une science spéciale [...] peut ne pas se soucier d'un trel intérêt [...]. Elle n'a donc pas besoin de se soucier de ce que *la référence à une application complètement indéterminée, idéalement possible, est impliquée par son propre sens logico-formel* [...]. Mais celui qui s'occupe de logique philosophique doit se soucier de tout cela. [...] En tant que logicien il doit voir que la *mathématique formelle est originellement analytique logique* [...][31].

Comme le dit Tran Duc Thao :

> [Le logicien] n'arrive pas à construire systématiquement toutes les formes de propositions possibles. La difficulté est particulièrement visible pour les jugements de numértion et de relation, qui impliquent une diversité infinie de formes distinctes, dont la thématisation n'est pas possible dans la simple réflexion sur le sens visé comme tel. De son côté, le mathématicien prend ce sens sous sa forme nominalisée, comme objet. Il s'occupe des collections elles-mêmes, des nombres eux-mêmes, des relations elles-mêmes. Il peut dès lors les manier dans de nouvelles synthèses, les composeret les décomposer à l'infini : mais il sera toujours question d'objets, non de jugements. Pourtant, il ne s'agit que d'objets catégoriaux, dont tout l'être consiste à être posé dans un jugement ($\kappa\alpha\tau\eta\gamma o\rho\epsilon\iota\nu$: énoncer). La vérité des mathématiques consiste justement en ce qu'il n'y est question de rien d'autre que de cela même qui se constitue dans les synthèses prédicatives. Mais l'*intention* du mathématicien ne va pas à ces synthèses comme telles. [...]
>
> Il advient que logique et mathématique s'occupent du même domaine en s'ignorant réciproquement. Le logicien étudie les jugements et le mathématicien les produits intelligibles qui s'y constituent. Si je dis que « a, b et c sont p », j'ai un jugement collectif sur les objets a, b et c perçus isolément, et qui ne sont rassemblés que dans le jugement, par la conjonction « *et* ». Si je nominalise, j'ai la *collection elle-même*, comme détermination intelligible (catégoriale) de l'objet, puisque je perçois désormais a, b et c non plus comme des objets isolés, et qu'il faudrait rassembler par une synthèse conjonctive, mais d'ores et déjà comme une collection unique, *qui est p*. Mais il est manifeste qu'il s'agit d'une seule et même chose, à savoir les contenus prédicatifs tantôt thématisés dans une réflexion noématique, tantôt nominalisés dans une étude objective. [...] La déduction mathématique perdrait toute signification effective si elle devait se réduire à un pur jeu de symboles vides. [...] Et il est clair en effet qu'une application des mathématiques au réel ne serait pas concevable si le signe $=$ n'avait pas justement le sens de la relation posée dans les jugements effectifs d'égalisation[32].

(Pour le passage de la logique formelle à la logique transcendantale comme fondation du rapport effectif à l'objet, cf. [Thao, 1992], p. 187-193.)

---

[31] [Husserl, 1984], §40.

[32] *Op. cit.*, §19, p. 185-187.

L'expression de logique philosophique mentionnée par Husserl est importante : elle signe la prétention du philosophe à conserver un droit de regard essentiel sur la logique et par là à ressaisir les mathématiques jusque dans leur autonomisation. Elle se retrouve, avec un sens tout différent mais une intention voisine, dans la première œuvre logique de Russell.

7.3.2 Russell

Les *Principes des mathématiques* sont considérés comme une réalisation paradigmatique de la thèse logiciste de la réductibilité des mathématiques à la logique. La dérivation de tous les théorèmes mathématiques à partir d'un nombre restreint d'axiomes et de concepts revient au mathématicien. La philosophie se voit de son côté réduite à une entreprise d'analyse logique des concepts mathématiques : il s'agit de reconnaître les entités « indéfinissables » sur lesquels reposent tous les concepts mathématiques, ainsi que les principes de déduction à l'œuvre dans les démonstrations.

> Ce travail poursuit deux objectifs principaux. L'un est de fournir la preuve que la totalité de la mathématique pure traite exclusivement de concepts définissables au moyen d'un très petit nombre de concepts logiques fondamentaux, et que toutes ses propositions sont déductibles à partir d'un très petit nombre de principes logiques fondamentaux ;
>
> [...]
>
> L'autre objectif de ce travail , qui occupe la première partie, est d'expliquer les concepts fondamentaux que la mathématique admet comme indéfinissable. [...] L'examen des indéfinissables [mathématiques] – qui constitue la partie principale de la logique philosophique – est un effort pour voir – et faire voir aux autres – clairement ces entités, de façon que l'esprit puisse en avoir cette sorte de connaissance directe que l'on a du rouge ou du goût d'un ananas[33].

Quels sont ces concept fondamentaux indéfinissables sur lesquels reposent le discours mathématique ? Il s'agit de formes logiques telles que la variable (x, conçue comme référant à absolument toute chose concevable), les fonctions propositionnelles (par exemple $\hat{x}$ *est un homme* : tout remplacement de la place vide indiquée par '$\hat{x}$' donne lieu à une proposition proprement dite), l'implication formelle (*Pour absolument tout* x, Px *implique* Qx), les concepts dénotants (c'est-à-dire, pour le concept de classe *homme*, la famille de concepts *tout homme*, *chaque homme*, *tous les hommes*, *un homme*, *quelque homme*), l'opérateur de description définie *tel ... que*. Ces constituants sont conçus par Russell comme des constituants ontiques de la signification des propositions dans lesquelles ils figurent, étant entendu que pour Russell une proposition se définit par le fait d'être vraie ou fausse, et constitue en soi une entité objective (une proposition ne saurait donc être confondue avec l'énoncé linguistique qui l'exprime). Ils sont nécessaires à la construction (et donc l'analyse) des propositions mathématiques, mais sont également présents dans le discours en général (ce qu'on appelle aujourd'hui le langage ordinaire). Dans la mesure où les propositions mathématiques (après analyse) ne font référence à aucune chose en particulier, et ne comportent pas d'autres constituants que les indéfinissables, elles peuvent être dites avoir pour objets ces indéfinissables. Les mathématiques auraient donc pour objet les formes logiques structurant les proposition en général, ce qui expliquerait à la fois leur commensurabilité avec le langage ordinaire, et leur statut spécial au sein de l'ensemble des propositions vraies. Mais c'est à la philosophie, en tant que grammaire, d'établir tout cela.

> La logique, pourrait-on dire, comprend deux parties. La première recherche ce que sont les propositions et quelles formes elles peuvent avoir [...]. La seconde est

[33] [Russell, 1992b], Préface de la première édition.

> constituée par certaines propositions suprêmement générales qui affirment la vérité de toutes les propositions de certaines formes. Cette seconde partie se fond avec la mathématique pure dont il apparaît à l'analyse que toutes les propositions constituent des vérités formelles générales de cette espèce[34].

Autrement dit, la logique est essentiellement déterminée par les mathématiques, puisque les notions logiques primitives sont censées coïncider avec les résidus de l'analyse des mathématiques. Mais les mathématiques sont en même temps ressaisies dans la sphère de la logique, puisque les concepts mathématiques primitifs (les « indéfinissables ») sont exactement ceux (« constantes logiques ») que la grammaire philosophique découvre à titre de conditions de possibilité de toute proposition.

Les parties II à VII des [Russell, 1992b] procèdent à cette analyse des mathématiques : concepts de nombre, d'ordre, de quantité, etc. (ce sont ainsi l'arithmétique, l'algèbre et la géométrie, l'analyse, qui sont reconduites à leurs éléments). La première partie, consacrée à la grammaire philosophique, est quant à elle rétrospective : Russell suppose déjà accomplie l'analyse des concepts mathématiques ordinaires, de sorte qu'il peut proposer le décompte des data conceptuels dégagés comme indéfinissables par la logique : l'implication formelle et la variable, la notion de classe et d'appartenance, les fonctions propositionnelles et la notion de satisfaction d'une fonction propositionnelle (la notion de *tel ... que*), etc[35]. La suite prouve que ces éléments suffisent à reconstruire l'ensemble des concepts mathématiques. Les indéfinissables des mathématiques s'avèrent donc coïncider avec les notions fondamentales nécessaires à l'intelligence et l'articulation des structures propositionnelles. Les mathématiques désignent à la fois un ensemble de propositions (théorèmes), et la théorie des constituants de n'importe quelle proposition : les objets des mathématiques sont des formes propositionnelles essentiellement parce que toute proposition mathématique est une proposition complètement générale (« Pour absolument tout x, si x ..., alors x ... », les conditions vérifiées par x ne faisant référence à aucune chose en particulier, et étant énoncées au moyen de termes purement logiques), de sorte qu'elle peut être considérée comme une vérité à propos des constituants structuraux qui l'articulent[36]. En ce sens les mathématiques sont non seulement logiques, mais se confondent même avec la logique, c'est-à-dire avec l'étude des conditions générales du *logos*, et c'est pourquoi elles ne concernent aucun domaine spécial d'objets. Les mathématiques dictent leurs conditions à la logique, mais se trouvent en même temps reconduites à la logique définie de façon autonome comme théorie générale des structures propositionnelles, y compris des structures propres aux propositions mathématiques : les mathématiques ne constituent pas un registre discursif hétérogène aux autres. Par conséquent la logique est d'un côté l'analyse mathématique des concepts et des théorèmes des mathématiques ordinaires, et d'un autre côté la grammaire philosophique qui ressaisit les mathématiques au sein de l'univers des propositions en général. La logique mise en

[34][Russell, 1995], p. 67.

[35]Ces notions sont si fondamentales que chacune se trouve présupposée par toute formulation qu'on peut essayer d'employer pour sa définition. Par exemple, Russell indique qu'on peut analyser la notion de *tout* (= *n'importe quel*) au moyen des notions de variable et d'implication formelle. Or une variable « n'est pas simplement n'importe quel terme, mais n'importe quel terme figurant dans une fonction propositionnelle » (§93). En effet, si je dis « Pour tout x, si Px, alors Qx », je dis autre chose que « Pour tout x, si Px, alors Qy », et pourtant x et y sont deux désignations équivalentes de la variable non restreinte : il existe en fait une individualité de la variable dont on ne peut rendre compte que dans le contexte d'une fonction propositionnelle. Le bilan est par conséquent que *tout* ou *n'importe quel* peut s'analyser au moyens des notions d'implication formelle et de fonction propositionnelle. Mais « [...] φx étant une fonction propositionnelle, x est le terme dans *n'importe quelle* proposition de la classe des propositions dont le type est φx » (*ibid*). Comme Russell le remarque, on retombe donc sur *n'importe quel* ; ce genre de cercle vicieux définitionnel est inévitable, étant donné la radicalité des notions examinées.

[36][Russell, 1992b], §1 :

> La mathématique pure est la classe de toutes les propositions de la forme « p implique q », où p et q sont des propositions contenant une ou plusieurs variables, les mêmes dans les deux propositions, et où ni p ni q ne contiennent d'autres constantes que des constantes logiques.

avant par le logicisme est donc indissociable d'une certaine façon de mettre en rapport mathématiques et philosophie : c'est pourquoi le terme de « philosophie » est le tiers terme qu'il est nécessaire d'introduire pour décrire le rapport de la logique et des mathématiques.

8 De quoi la logique est-elle la science ? (Plan)

Problématique : ou bien la logique est une science, donc possède un objet spécifique, mais se réduit alors à une science particulière, là où la logique se caractérise par sa prééminence sur toute science : tout discours théorique, tout discours prétendant à la vérité, y compris le discours du logicien lui-même, doit en effet se conformer aux règles logiques pour être recevable comme tel. Ou bien la logique n'a pas d'objet particulier, mais porte sur la pensée en général, ou bien sur le fondement de toute science, mais cesse alors de constituer une science proprement dite, pour devenir une réflexion philosophique sur les sciences. (Dire qu'il s'agit alors d'une science de second degré, ayant les sciences de premier degré pour objet ne fait qu'engager dans une régression à l'infini.)

8.1 La logique comme science

8.1.1 La logique comme science des lois de la pensée : définition traditionnelle au fond psychologisante

« La logique se définit communément comme l'étude des lois de la pensée vraie. C'est là une formule défectueuse qui rend à peu près inévitable une chute dans le psychologisme. En fait le logicien ne s'occupe pas des actes subjectifs de pensée mais de leurs produits objectivement constitués ; les propositions, leurs moments et leurs combinaisons[37]. » Les lois logiques ne sont pas normatives, mais objectives ; il conviendrait donc de parler de vérités logiques plutôt que de lois logiques. Mais quel sera alors l'objet de ces vérités ? Le problème se repose entièrement.

Par ailleurs, parler de « lois de la pensée » suppose qu'il est idéalement possible de penser quelque chose d'illogique (par exemple, *A et non-A*), pour ensuite nier cette possibilité : ce qui est rejeté comme impossible ou illogique doit jouir d'une possibilité ou concevabilité minimale précisément pour pouvoir être énoncé et rejeté comme illogique. Mais c'est donc que le possible absolu s'étend au-delà de la possibilité logique, et que cette dernière ne décrit pas réellement tout le possible, mais seulement cette partie du possible que nous considérons comme réellement pensable, ce qui dégrade la logique en la limitant à la constitution contingente de la pensée humaine.

8.1.2 La logique comme science des sciences (Husserl)

Le contexte historique des réflexions de Husserl est en fait à la fois celui des fondements des mathématiques (face aux paradoxes), et celui de l'autonomisation discursive des mathématiques, et par suite l'éclatement du domaine de la pensée théorique. Faire de la logique une science, comme si son objet était défini de toute éternité, est une façon de sublimer l'historicité fondamentale de la logique.

8.2 La logique comme discipline garante de l'unité des sciences

8.2.1 Russell : [Russell, 1992b]

8.2.2 Carnap : [Carnap, 1934]

Mais la logique n'est plus une science, elle est la réalisation d'un projet philosophique.

[37][Thao, 1992], p. 180.

8.3 Deux extrêmes

8.3.1 La logique comme logique mathématique : dans ce cas, on a affaire à une science de premier degré, mais s'agit-il encore de logique ?

8.3.2 La logique comme grammaire philosophique (Wittgenstein) : mais s'agit-il encore d'une science ?

Références

[Benvéniste, 1966] Benvéniste, E. (1966). Catégories de pensée, catégories de langue. In *Problèmes de linguistique générale*. Gallimard, Paris.

[Carnap, 1934] Carnap, R. (1934). *Logische Syntax der Sprache*. J. Springer, Wien.

[Carnap, 1963] Carnap, R. (1963). Philosophical problems. In Schilpp, P. A., editor, *The Philosophy of Rudolf Carnap*, volume 11 of *The Library of Living Philosophers*, pages 44–84. Open Court, LaSalle.

[Frege, 1969] Frege, G. (1969). *Les Fondements de l'arithmétique*. Seuil, Paris. Traduction et introduction de Claude Imbert.

[Frege, 1994] Frege, G. (1994). La logique calculatoire de boole et l'idéographie. In de Rouilhan, P. and Tiercelin, C., editors, *Gottlob Frege. Écrits posthumes*, pages 17–60. Jacqueline Chambon.

[Frege, 1999] Frege, G. (1999). *Idéographie*. Vrin, Paris. Traduction française de Corine Besson.

[Griffin, 1980] Griffin, N. (1980). Russell on the nature of logic (1903-1913). *Synthese*, 45 :117–188.

[Husserl, 1984] Husserl, E. (1984). *Logique formelle et logique transcendantale. Essai d'une critique de la raison logique*. PUF, Paris, 3e edition. Traduit de l'allemand par Suzanne Bachelard.

[Imbert, 1993] Imbert, C. (1993). *Phénoménologies et langues formulaires*. PUF, Paris.

[Leibniz, 1995] Leibniz, G. (1995). *Naissance du calcul différentiel*. Vrin, Paris. Introduction, traduction et notes de Marc Parmentier.

[Leibniz, 1998a] Leibniz, G. (1998a). Recherches générales sur l'analyse des notions et des vérités. In Rauzy, J.-B., editor, *Recherches générales sur l'analyse des notions et des vérités. 24 thèses métaphysiques et autres textes logiques et métaphysiques*, chapter V, pages 200–320. PUF, Paris.

[Leibniz, 1998b] Leibniz, G. (1998b). *Recherches générales sur l'analyse des notions et des vérités. 24 thèses métaphysiques et autres textes logiques et métaphysiques*. PUF, Paris. Présentation de J.-B. Rauzy.

[Rivenc, 1993] Rivenc, F. (1993). *L'Universalisme logique*. Payot, Paris.

[Russell, 1992a] Russell, B. (1992a). Necessity and possibility. In *Collected Papers*, volume 4, chapter 22, pages 508–520. Routledge.

[Russell, 1992b] Russell, B. (1992b). *Principles of Mathematics*. Routledge, London, second edition.

[Russell, 1995] Russell, B. (1995). *Our Knowledge of the External World*. Routledge, London.

[Serrus, 1933] Serrus, C. (1933). *Le parallélisme logico-grammatical*. Félix Alcan, Paris.

[Thao, 1992] Thao, T. D. (1992). *Phénoménologie et matérialisme dialectique*. Gramma, Paris. Première publication en 1951.

[Wittgenstein, 1975] Wittgenstein, L. (1975). *Remarques philosophiques*. Gallimard, Paris. Traduit de l'allemand par Jacques Fauve.

[Wittgenstein, 1978] Wittgenstein, L. (1978). *Philosophical Grammar*. University of California Press, Berkeley, Los Angeles. Edited by Rush Rhees, translated by Anthony Kenny.